Mathematics

JAN 1 [illegible] 1933

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 169

Heft 1

Ausgegeben den 21. Dezember 1932

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1932

Band 169. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Bergmann, Stefan, Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I.	1
Jung, Heinrich W. E., Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen. D. Doppelintegrale zweiter Gattung	43
Mahler, Kurt, Ein Beweis der Transzendenz der P-adischen Exponentialfunktion . .	61

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Bei unvermindertem Umfang **ermäßigt** sich
der Preis für den neuen Band **auf RM. 35.–**

Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I.

Von *Stefan Bergmann* in Berlin.

§ 1.

Die kartesischen (rechtwinkligen) Koordinaten eines Punktes P des vierdimensionalen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ [1]) bezeichnen wir mit x_1, y_1, x_2, y_2 und setzen

$$z_\varkappa = x_\varkappa + iy_\varkappa, \qquad \bar{z}_\varkappa = x_\varkappa - iy_\varkappa \qquad (\varkappa = 1,2).$$

Für einen Punkt $P(x_1, y_1, x_2, y_2)$ schreiben wir auch $P(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Ebenso ersetzen wir die reellen Komponenten $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ eines Vektors durch die komplexen $\zeta_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2$, wo $\zeta_\varkappa = \xi_\varkappa + i\eta_\varkappa$, $\bar{\zeta}_\varkappa = \xi_\varkappa - i\eta_\varkappa$ $(\varkappa = 1,2)$ ist, und verstehen jetzt unter Einheitsvektor $(\zeta_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)$ einen solchen für den

$$|\zeta_1| = 1, \quad |\zeta_2| = 1$$

ist. Der Winkel θ zwischen den beiden Einheitsvektoren $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ und $\beta_1, \beta_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ ist durch

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\alpha_1\bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1\beta_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2\beta_2)$$

gegeben. Für eine reelle oder komplexe Funktion φ der vier reellen Veränderlichen x_1, y_1, x_2, y_2, schreiben wir $\varphi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ oder kürzer $\varphi(z, \bar{z})$. Durch

$$d\varphi = \sum_{\varkappa=1}^{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\varkappa}dx_\varkappa + \frac{\partial\varphi}{\partial y_\varkappa}dy_\varkappa\right) = \sum_{\varkappa=1}^{2}(A_\varkappa dz_\varkappa + B_\varkappa d\bar{z}_\varkappa)$$

definieren wir die Ableitungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_\varkappa} = A_\varkappa, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_\varkappa} = B_\varkappa$$

und erhalten somit [2])

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_\varkappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\varkappa} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y_\varkappa}\right), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_\varkappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\varkappa} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y_\varkappa}\right).$$

---

[1]) Wir werden im folgenden

mit	fett	gedruckten	großen	deutschen	Buchstaben	die	vierdimensionalen	Mannigfaltigkeiten
,,	,,	,,	kleinen	,,	,,	,,	dreidimensionalen	,,
,,	gewöhnlich	,,	großen	,,	,,	,,	zweidimensionalen	,,
,,	,,	,,	kleinen	,,	,,	,,	eindimensionalen	,,

bezeichnen.

Betreffend der im folgenden benutzten Bezeichnungen sei hervorgehoben, daß $\mathfrak{B}[f(z_1, z_2) = \gamma]$ den Schnitt des Körpers $\mathfrak{B}$ mit der Fläche $f(z_1, z_2) = \gamma$ bedeutet.

[2]) Wegen dieser Schreibweise vgl. Wirtinger „Zur formalen Theorie der Funktionen...", Math. Ann. **97** (1927), S. 357, und H. Kneser „Die Singulären Kanten...", Math. Ann. **106** (1932), S. 656—660.

Die Funktion φ heißt eine analytische Funktion der beiden komplexen Veränderlichen z_1, z_2, in einem zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$, wenn sie dort stetig differenzierbar ist, und außerdem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2) \tag{1. 2}$$

gilt (Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Wir schreiben dann

$$\varphi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \varphi(z_1, z_2).$$

Ebenso heißt eine stetig differenzierbare Funktion in einem zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{B}$ analytisch in $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ wenn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

gilt, und entsprechend wird dann

$$\varphi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \varphi(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

geschrieben. Ist $\varphi(z_1, z_2)$ eine analytische Funktion von z_1, z_2, so ist $\overline{\varphi(z_1, z_2)}$ eine analytische Funktion von $\bar{z}_1, \bar{z}_2$, und wir schreiben allgemein

$$\overline{\varphi(z_1, z_2)} = \bar{\varphi}\,(\bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

Es sei nun $\mathfrak{B}$ ein offener, schlichter, zusammenhängender Bereich des $\mathfrak{R}$, von dem wir annehmen, daß er sich durch eine analytische Abbildung auf einen beschränkten Bereich abbilden läßt. Mit $F_{\mathfrak{B}}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller in $\mathfrak{B}$ regulär analytischen Funktionen (fz_1, z_2), für die das Integral

$$(f, f)_{\mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{B}} |f(z_1, z_2)|^2 \, d\omega \tag{1. 3}$$

endlich ist, wo $d\omega = dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$ das vierdimensionale Volumenelement bedeutet. Wird als Entfernung zweier Funktionen f und g aus $F_{\mathfrak{B}}$ der Ausdruck

$$E(f, g) = \sqrt{(f - g, f - g)_{\mathfrak{B}}} \tag{1. 4}$$

definiert, so bildet $F_{\mathfrak{B}}$ einen linearen metrischen Raum. Als inneres Produkt (f, g) zweier Funktionen f und g aus $F_{\mathfrak{B}}$ definieren wir

$$(f, g)_{\mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{B}} f(z_1, z_2)\, \overline{g(z_1, z_2)}\, d\omega \text{ [1]}. \tag{1. 5}$$

Die Funktionen f, g sind zueinander orthogonal, wenn

$$(f, g)_{\mathfrak{B}} = 0 \tag{1. 6}$$

ist. Für jeden Bereich $\mathfrak{B}$ gibt es vollständige Orthogonalsysteme [2]). Bedeutet

$$\varphi_1(z_1, z_2), \quad \varphi_2(z_1, z_2), \quad \varphi_3(z_1, z_2), \ldots$$

ein vollständiges, normiertes Orthogonalsystem, so daß

$$(\varphi_\nu, \varphi_\mu)_{\mathfrak{B}} = \delta_{\nu\mu} \qquad \begin{matrix} \delta_{\nu\mu} = 1, & \nu = \mu \\ \delta_{\nu\mu} = 0, & \nu \neq \mu \end{matrix}$$

---

[1]) Für diese Definition vgl. auch (1. 3).

[2]) Die Vollständigkeit eines Systemes φ_ν besagt, daß für jedes f aus $F_{\mathfrak{B}}$ die Relation $(f, f)_{\mathfrak{B}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \varphi_\nu)_{\mathfrak{B}}^2$ gilt. Vgl. dazu „Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Annalen **100** (1928), S. 399, sowie auch Bochner „Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen", Math. Zeitschr. **14** (1922), S. 180—207. Neuerdings hat Herr Hammerstein unter Heranziehung der Theorie der Orthogonalfunktionen im Komplexen gezeigt, daß bei einer sehr allgemeinen Klasse von einfachzusammenhängenden Bereichen bereits das System von Orthogonalpolynomen vollständig ist. Für diese Bereiche ist die effektive Berechnung der Kernfunktion möglich. (Die Untersuchung erscheint in den Sitz.-Ber. d. preuß. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1933.)

ist, so läßt sich jede Funktion aus $F_{\mathfrak{B}}$ in eine Reihe

$$f(z_1, z_2) = \sum_1^\infty c_\nu \varphi_\nu(z_1, z_2) \tag{1.7}$$

entwickeln, wo $c_\nu = (f, \varphi_\nu)_{\mathfrak{B}}$ ist und die Reihe im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert [1]). Dies letztere folgt daraus, daß die Reihe

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sum_{\nu=1}^\infty |\varphi_\nu(z_1, z_2)|^2 \tag{1.8}$$

für jeden inneren Punkt z_1, z_2 von $\mathfrak{B}$ gegen einen endlichen Wert konvergiert. $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$, die **Kernfunktion des Bereiches $\mathfrak{B}$**, ist von der Wahl des speziellen Orthogonalsystemes unabhängig. Allgemein führen wir die Funktion $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)$ vermöge

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z; \bar{t}) = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) = \sum_{\nu=1}^\infty \varphi_\nu(z_1, z_2)\, \overline{\varphi_\nu(t_1, t_2)} \tag{1.9}$$

ein, wo z_1, z_2 bzw. t_1, t_2 dem Bereiche $\mathfrak{B}$ entnommen sind. Es ist dann

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1^0, \bar{z}_2^0) = \frac{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1^0, \bar{z}_2^0)}{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1^0, z_2^0; \bar{z}_1^0, \bar{z}_2^0)} \tag{1.10}$$

die **Minimalfunktion des Bereiches $\mathfrak{B}$** in bezug auf den Punkt z_1^0, z_2^0, nämlich diejenige Funktion aus $F_{\mathfrak{B}}$, die im Punkte z_1^0, z_2^0 den Wert 1 annimmt und $(f, f)_{\mathfrak{B}}$ zum Minimum macht [2]).

Dieses Minimum ist dann durch

$$(\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}, \mathsf{M}_{\mathfrak{B}})_{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1^0, z_2^0; \bar{z}_1^0, \bar{z}_2^0)} \tag{1.11}$$

gegeben, was zu einer neuen Definition für die Kernfunktion führt: *Die Kernfunktion kann auch als die obere Schranke $|h(z_1^0, z_2^0)|^2$ definiert werden, wenn $h(z_1, z_2)$ alle Funktionen durchläuft, für die*

$$(h, h)_{\mathfrak{B}} \leqq 1$$

ist. Hieraus folgt leicht die für das folgende *grundlegende Beziehung*

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z; \bar{z}) \geqq \mathsf{K}_{\mathfrak{B}^*}(z; \bar{z}), \tag{1.12}$$

wenn

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{B}^*$$

ist.

---

[1]) „Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereich gehören, ...", Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 640.

[2]) Die Kernfunktion und die Minimalfunktion wurden in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen in der Arbeit „Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen", Math. Annalen **86** (1922), S. 237—271, eingeführt und näher studiert. Sie hängen in einer einfachen Weise mit der Kreisabbildungsfunktion des Bereiches $\mathfrak{B}$ zusammen: Ist $\mathfrak{B}$ einfach zusammenhängend und ist a ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$, so ist die im Punkte a normierte Kreisabbildungsfunktion $w(z)$ $\left[\left(\frac{dw(z)}{dz}\right)_{z=a} = 1\right]$ von $\mathfrak{B}$: $w(z) = \int_a^z \mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z; \bar{a})\, dz$, während $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(a; \bar{a}) = \frac{1}{\pi \mathsf{P}_{\mathfrak{B}}^2(a)}$ ist, wobei $\mathsf{P}_{\mathfrak{B}}(a)$ den Abbildungsradius von $\mathfrak{B}$ in bezug auf a bedeutet.

Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen gelangt man zu verschiedenen Kern- und Minimalfunktionen, je nachdem man als Klasse $F_{\mathfrak{B}}$ die Gesamtheit der eindeutigen analytischen Funktionen $f(z)$ wählt, oder aber die Klasse durch die weitere Forderung einschränkt, daß auch die Integrale $\int_a^z f(z)\, dz$ der zur Klasse gehörigen Funktionen eindeutig sind. Vgl. dazu die Arbeit von Zarankiewicz „Über eine numerische Methode zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche", die demnächst in d. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. erscheint.

Aus der letzten Definition folgt noch eine weitere Eigenschaft der Kernfunktion. Betrachtet man etwa den Schnitt $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ [1]), *so nimmt die Kernfunktion ihr Maximum am Rande von* $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ *an.* Es gibt nämlich für jeden inneren Punkt z_1^0 von $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ eine Funktion $f(z_1, \gamma)$ so daß

$$|f(z_1^0, \gamma)|^2 > \mathsf{K}(z_1^0, \gamma; \bar{z}_1^0, \bar{\gamma}) - \varepsilon \qquad \varepsilon > 0 \tag{1.13}$$

gilt. Diese Funktion $f(z_1, \gamma)$ ist eine Funktion einer komplexen Veränderlichen z_1; ihr absoluter Betrag nimmt also am Rande einen Wert

$$|f(\zeta, \gamma)|^2 \geqq |f(z_1^0, \gamma)|^2 \geqq \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1^0, \gamma; \bar{z}_1^0, \bar{\gamma})$$

an, woraus die Behauptung folgt.

Eine analytische Transformation des Bereiches wird durch

$$z_\varkappa^* = g_\varkappa(z_1, z_2) \qquad (\varkappa = 1, 2) \tag{1.14}$$

vermittelt, wo die $g_\varkappa$ regulär analytisch in $\mathfrak{B}$ sind und durch Transformation (1. 14) der Bereich $\mathfrak{B}$ eineindeutig auf einen schlichten Bereich $\mathfrak{B}^*$ abgebildet wird. Die Abbildung (1. 14) gestattet die Umkehrung

$$z_\varkappa = h_\varkappa(z_1^*, z_2^*) \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

wo die $h_\varkappa$ in $\mathfrak{B}^*$ regulär analytische Funktionen sind. Die Funktionaldeterminanten

$$D(z_1, z_2) = \frac{\partial(z_1^*, z_2^*)}{\partial(z_1, z_2)}, \qquad E(z_1^*, z_2^*) = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(z_1^*, z_2^*)}$$

sind in $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ von 0 und ∞ verschieden, denn es gilt: $D(z_1, z_2)\, E(z_1^*, z_2^*) = 1$. Geht vermöge der Transformation (1. 14) der Bereich $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ in den Bereich $\mathfrak{A}^* < \mathfrak{B}^*$ über, so gilt

$$\int_{\mathfrak{A}} d\omega = \int_{\mathfrak{A}^*} |E(z_1^*, z_2^*)|^2\, d\omega^*,$$

wo $d\omega^* = dx_1^*\, dy_1^*\, dx_2^*\, dy_2^*$ das Volumenelement von $\mathfrak{B}^*$ bedeutet. Es ist somit

$$(f, g)_{\mathfrak{B}} = (f(h_1, h_2)\, E, g(h_1, h_2)\, E)_{\mathfrak{B}^*}.$$

Durch die Zuordnung

$$f(z_1, z_2) \to f^*(z_1^*, z_2^*) = f(h_1, h_2)\, E(z_1^*, z_2^*)$$

geht die Funktionsklasse $F_{\mathfrak{B}}$ in $F_{\mathfrak{B}^*}$ über, wobei das innere Produkt bei dieser Zuordnung ungeändert bleibt. Insbesondere geht das vollständige Orthogonalfunktionensystem $\varphi_\nu(z_1, z_2)$ in das für den Bereich $\mathfrak{B}^*$ vollständige Orthogonalfunktionensystem

$$\varphi_\nu^*(z_1^*, z_2^*) = \varphi_\nu(h_1, h_2)\, E(z_1^*, z_2^*)$$

und die Entwicklung (1. 7) in

$$f^*(z_1^*, z_2^*) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, \varphi_\nu^*(z_1^*, z_2^*)$$

über. *Hieraus folgt weiter für die Kernfunktion des Bereiches* $\mathfrak{B}^*$

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}^*}(z_1^*, z_2^*; \bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_\nu^*(z_1^*, z_2^*)|^2 \\ &= \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}[h_1(z_1^*, z_2^*),\ h_2(z_1^*, z_2^*);\ \overline{h_1(z_1^*, z_2^*)},\ \overline{h_2(z_1^*, z_2^*)}]\ |E(z_1^*, z_2^*)|^2. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Die Kernfunktion ist somit eine (relative) Invariante gegenüber analytischen Abbildungen.

Setzt man

$$\mathsf{T} = \ln \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \quad \text{und} \quad \mathsf{T}_{z_k \bar{z}_m} = \frac{\partial^2 \mathsf{T}}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_m}$$

[1]) $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ bedeutet den Durchschnitt des Körpers $\mathfrak{B}$ und der Ebene $z_2 = \gamma$.

so ist die Hermitesche Differentialform

$$ds^2 = \sum_{k,m}^{2} \mathsf{T}_{z_k \bar{z}_m}\, dz_k\, d\bar{z}_m \tag{1,16}$$

positiv definit und gegenüber analytischen Transformationen $z_1^* = g_k(z_1, z_2)$ $(k = 1, 2)$ invariant. Unter Berücksichtigung, daß nach (1. 2) und (1. 15)

$$\frac{\partial^2 \ln \mathsf{K}_{\mathfrak{B}^*}(z_1^*, z_2^*;\ \bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*)}{\partial z_k^*\, \partial \bar{z}_m^*} = \frac{\partial^2 \ln \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(h_1, h_2;\ \bar{h}_1, \bar{h}_2)}{\partial z_k^*\, \partial \bar{z}_m^*} + \frac{\partial^2 \ln E(z_1^*, z_2^*)}{\partial z_k^*\, \partial \bar{z}_m^*} + \frac{\partial^2 \ln \bar{E}(\bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*)}{\partial z_k^*\, \partial \bar{z}_m^*} = \frac{\partial^2 \ln \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(h_1, h_2;\ \bar{h}_1, \bar{h}_2)}{\partial z_k^*\, \partial \bar{z}_m^*}$$

$[h_k = h_k(z_1^*, z_2^*)]$ ist, läßt sich dies durch eine formale Rechnung, die wir hier übergehen, leicht einsehen. In ds^2 hat man also ein Bogenelement, das zu einer gegenüber analytischen Transformationen invarianten Metrik führt. Daß die Determinante $N = \begin{vmatrix} \mathsf{T}_{z_1 \bar{z}_1} & \mathsf{T}_{z_2 \bar{z}_1} \\ \mathsf{T}_{z_1 \bar{z}_2} & \mathsf{T}_{z_2 \bar{z}_2} \end{vmatrix}$ in keinem inneren Punkte $z_1 = z_1^0$, $z_2 = z_2^0$ von $\mathfrak{B}$ verschwindet, läßt sich auf folgende Weise einsehen: Setzt man

$$\mathsf{T}_{z_k \bar{z}_m} = \frac{\partial^2 \ln \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_m} = \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}^2}\left[\mathsf{K}_{\mathfrak{B}} \frac{\partial^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}}{\partial z_k \partial \bar{z}_m} - \frac{\partial \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}}{\partial z_k} \frac{\partial \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}}{\partial \bar{z}_m}\right],$$

so schreibt sich $N = \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}^3} \begin{vmatrix} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}} & \mathsf{K}_{z_1} & \mathsf{K}_{z_2} \\ \mathsf{K}_{\bar{z}_1} & \mathsf{K}_{z_1 \bar{z}_1} & \mathsf{K}_{z_2 \bar{z}_1} \\ \mathsf{K}_{\bar{z}_2} & \mathsf{K}_{z_1 \bar{z}_2} & \mathsf{K}_{z_2 \bar{z}_2} \end{vmatrix}$ $\left(\mathsf{K}_{z_k} = \frac{\partial \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}}{\partial z_k},\ \mathsf{K}_{z_k \bar{z}_m} = \frac{\partial^2 \mathsf{K}}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_m}\right)$. Da nun $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z_1, z_2)\, \overline{\varphi}_\nu(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ ist, folgt weiter (nach der verallgemeinten Schwarzschen Relation) $N = \frac{1}{6} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |D_{\varkappa\mu\nu}(z_1, z_2)|^2$, wo

$$D_{\mu\nu\varkappa}(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} \varphi_\varkappa(z_1, z_2) & \dfrac{\partial \varphi_\varkappa(z_1, z_2)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \varphi_\varkappa(z_1, z_2)}{\partial z_2} \\ \varphi_\mu(z_1, z_2) & \dfrac{\partial \varphi_\mu(z_1, z_2)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \varphi_\mu(z_1, z_2)}{\partial z_2} \\ \varphi_\nu(z_1, z_2) & \dfrac{\partial \varphi_\nu(z_1, z_2)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \varphi_\nu(z_1, z_2)}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

bedeutet. In dem letzten Ausdruck für N sind alle Summanden positiv. Wir müssen somit nur noch zeigen, daß es unter ihnen einen gibt, der nicht verschwindet. Es läßt sich aber stets ein Orthogonalfunktionensystem angeben, dessen drei ersten Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 in der Umgebung der Stelle z_1^0, z_2^0 eine Entwicklung von der Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1, z_2) &= \alpha_0 + \alpha_1(z_1 - z_1^0) + \alpha_2(z_2 - z_2^0) + \cdots && \alpha_0 \neq 0 \\ \varphi_2(z_1, z_2) &= \beta_1(z_1 - z_1^0) + \beta_2(z_2 - z_2^0) + \cdots && \beta_1 \neq 0 \\ \varphi_3(z_1, z_2) &= \gamma_2(z_2 - z_2^0) + \cdots && \gamma_2 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$D_{\varkappa\mu\nu}(z_1^0, z_2^0) = \alpha_0\, \beta_1\, \gamma_2 \neq 0\,.$$

Mit Hilfe der invarianten Metrik kann man leicht (absolute) Invarianten bilden. In unserer unitären Geometrie tritt eine wichtige Invariante, nämlich

$$\boldsymbol{I}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2;\ \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\begin{vmatrix} \mathsf{T}_{z_1 \bar{z}_1} & \mathsf{T}_{z_2 \bar{z}_1} \\ \mathsf{T}_{z_1 \bar{z}_2} & \mathsf{T}_{z_2 \bar{z}_2} \end{vmatrix}} = \frac{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}^4(z_1, z_2;\ \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\begin{vmatrix} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}} & \mathsf{K}_{z_1} & \mathsf{K}_{z_2} \\ \mathsf{K}_{\bar{z}_1} & \mathsf{K}_{z_1 \bar{z}_1} & \mathsf{K}_{z_1 \bar{z}_2} \\ \mathsf{K}_{\bar{z}_2} & \mathsf{K}_{z_1 \bar{z}_2} & \mathsf{K}_{z_2 \bar{z}_2} \end{vmatrix}} \tag{1. 17}$$

auf, mit der wir uns im folgenden befassen werden.

Es sei noch bemerkt, daß die Hermitesche Differentialform (1. 16) nicht zu dem allgemeinsten Fall der unitären Geometrie führt. Es gelten nämlich (in der Bezeichnungsweise von Schouten [1])) bei uns die folgenden Beziehungen:

$$S_{\bar{m}p}^{\cdot\cdot\cdot n} = 0, \qquad -\sum_n R_{\bar{m}np}^{\cdot\cdot\cdot n} = -\sum_n R_{\bar{m}pn}^{\cdot\cdot\cdot n} = -\frac{\partial^2 \ln \boldsymbol{I}_{\mathfrak{B}}(z_1 z_2;\ \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\partial \bar{z}_m\, \partial z_p} + \mathsf{T}_{\bar{z}_m z_p}. \tag{1. 18}$$

(Entsprechendes gilt für die konjugierten Größen.)

An Stelle von (1. 16) kann man jede dazu konforme Differentialform (die durch Multiplikation von (1. 16) mit einer Invariante entsteht) benutzen.

---

[1]) Die hierher gehörende Fußnote wurde wegen Platzmangel auf dieser Seite auf der nächstfolgenden Seite 6 untergebracht.

Die Kernfunktion $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ ist eine im Innern von $\mathfrak{B}$ beliebig oft differenzierbare Funktion; im folgenden wird das Verhalten dieser Funktion untersucht, wenn der Punkt z_1, z_2 sich einem Randpunkt Q nähert. Die Kernfunktion wird dann im allgemeinen unendlich. Im nächsten Paragraphen werden wir eine Präzisierung der Annäherung geben und die Ordnung des Unendlichwerdens definieren.

$B(z, \bar{z})$ bedeute eine in $\mathfrak{B}$ nichtnegative Funktion. Unter der Klasse der *im weiteren Sinne quadratintegrierbaren* Funktionen, die zu der Belegungsfunktion $B(z, \bar{z})$ gehören, verstehen wir die Gesamtheit aller in $\mathfrak{B}$ regulär analytischen Funktionen $f(z_1, z_2)$, für die das Integral (1. 3) endlich ist; wobei jetzt $d\omega$ im Gegensatz zu der früheren Festsetzung das mit der Belegungsfunktion $B(z, \bar{z})$ multiplizierte (vierdimensionale ev. nichteuklidische) Volumenelement bedeutet. (Man kann z. B. $B(z, \bar{z}) = [K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})]^{-n}$, n positiv, oder $B(z, \bar{z}) = e^{-K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})}$ wählen.)

Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Betrachtungen lassen sich bei vielen Klassen von im weiteren Sinne quadratintegrierbaren Funktionen wiederholen.

§ 2.

Vom Randpunkt Q des Bereiches $\mathfrak{B}$, in dem wir das Verhalten der Kernfunktion von $\mathfrak{B}$ untersuchen, setzen wir voraus, daß in einer genügend kleinen Umgebung von Q die inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ durch

$$\Phi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) > 0 \tag{2. 1}$$

gegeben sind, während die Berandung von $\mathfrak{B}$ dort durch die Hyperfläche

$$\Phi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0 \tag{2. 2}$$

gebildet wird. Hierbei bedeutet Φ eine stetig differenzierbare Funktion in der Umgebung des Randpunktes Q, den wir als den Koordinatenanfangspunkt wählen. Sind nun in dem Punkte Q nicht sämtliche Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_\varkappa}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

gleich Null, so existiert im Punkte $Q(0, 0)$ die Tangentialhyperebene

$$\bar{a}_1 z_1 + a_1 \bar{z}_1 + \bar{a}_2 z_2 + a_2 \bar{z}_2 = 0, \tag{2. 3}$$

wo

$$\bar{a}_\varkappa = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_\varkappa}\right)_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}}, \quad a_\varkappa = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_\varkappa}\right)_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

ist. $\alpha_\varkappa = \dfrac{a_\varkappa}{|a_\varkappa|}$, $\bar{\alpha}_\varkappa = \dfrac{\bar{a}_\varkappa}{|a_\varkappa|}$ $(\varkappa = 1, 2)$ sind die Richtungskonstanten der Normalen im Punkte Q.

Bestimmt man nun ein reelles τ, so daß

$$\tau \bar{a}_1 = e^{i\gamma_1} \cos \vartheta, \qquad \tau \bar{a}_2 = e^{i\gamma_2} \sin \vartheta,$$

und führt die orthogonale Transformation

(Noch auf Seite 5 gehörig:) [1]) Vgl. dazu Schouten „Über unitäre Geometrie", Proc. Akad. Amsterdam **32** (1929), S. 457—465, und Schouten und van Dantzig „Über unitäre Geometrie", Math. Annalen **108** (1930), S. 319—346.

Ist das Linienelement allgemein durch $\sum_{m, n} g_{\bar{m}n}\, dz_n\, d\bar{z}_m$ gegeben, so wird die zugehörige lineare Übertragung dadurch charakterisiert, daß das kovariante Differential von $g_{\bar{m}n}$ verschwindet. Es gilt dann

$$\Gamma^n_{mp} = \sum_r g^{\bar{r}n} \frac{\partial g_{\bar{r}m}}{\partial z_p}, \qquad S^{\cdot\cdot n}_{mp} = \Gamma^n_{mp} - \Gamma^n_{mp}$$

und für die Komponenten des Krümmungstensors $R^{\cdot\cdot\cdot k}_{\bar{m}\,n\,p} = -R^{\cdot\cdot\cdot k}_{n\,\bar{m}\,p} = -\dfrac{\partial \Gamma^k_{pn}}{\partial \bar{z}_m}$ usw.

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} z_1^* &= \quad e^{i\gamma_1}\cos\vartheta\, z_1 + e^{i\gamma_2}\sin\vartheta\, z_2 \\ z_2^* &= -e^{i\delta_1}\sin\vartheta\, z_1 + e^{i\delta_2}\cos\vartheta\, z_2 \end{aligned}, \qquad \gamma_1 - \delta_1 = \gamma_2 - \delta_2$$

aus, so lautet die Tangentialhyperebene (2. 3) in den neuen Veränderlichen

$$(2.5)\qquad z_1^* + \bar{z}_1^* = 0\,.$$

Wir wählen noch das Vorzeichen so, daß der inneren Normalen

$$(2.6)\qquad x_1^* \geqq 0$$

entspricht. Die Koordinaten z_1^* und z_2^* sollen für den Punkt Q normal heißen. Führen wir bei normalen Koordinaten statt $z_1, \bar{z}_1$ [1]) wieder die Veränderlichen x_1, y_1 ein, so kann durch Auflösung nach x_1 die Gleichung der Berandungshyperfläche in der Umgebung des Punktes Q in der Form

$$(2.7)\qquad 2x_1 = \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2)$$

geschrieben werden, wo

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right)_{\substack{y_1=0\\z_2=0}} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\right)_{\substack{y_1=0\\z_2=0}} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}_2}\right)_{\substack{y_1=0\\z_2=0}} = 0$$

ist. Die inneren Punkte in der Umgebung von Q sind dann durch die Ungleichung

$$(2.8)\qquad 2x_1 > \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2)$$

gegeben.

Bei der Untersuchung des Verhaltens der Kernfunktion im Randpunkte $Q(0, 0)$ werden wir verschiedene Annäherungen an den Randpunkt Q unterscheiden:

1. Annäherung A^I. Hierunter verstehen wir die Konvergenz

$$(2.9)\qquad z_1 \to 0, \qquad z_2 \to 0,$$

so daß der Punkt $P(z_1, z_2)$ aus $\mathfrak{B}$ noch innerhalb eines Kegels Ω_α verbleibt, wo Ω_α die Gesamtheit aller Strahlen bedeutet, die durch den Randpunkt Q gehen und mit der inneren Normalen einen Winkel bilden, der kleiner als α ist. Benutzt man im Punkte Q normale Koordinaten, so ist der Kegel Ω_α durch die Ungleichungen

$$(2.10)\qquad \begin{gathered} x_1 > 0\,, \\ \frac{\varrho}{x_1} = \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{x_1} < \frac{1}{\cos\alpha} \end{gathered}$$

charakterisiert.

2. Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$. Es bedeuten z_1 und z_2 die normalen Koordinaten. Neben (2. 9) soll noch

$$(2.11)\qquad \operatorname{arc} z_1 \to \alpha\,, \qquad |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

bestehen.

3. Annäherung $\mathsf{A}^{III}(\alpha)$. Sie ist eine Verschärfung von $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$; es wird statt (2. 11)

$$(2.12)\qquad \operatorname{arc} z_1 = \text{const.} = \alpha\,, \qquad |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

gesetzt.

4. Annäherung $\mathsf{A}^{IV}(a_1, a_2)$. $P_0(a_1, a_2)$ sei ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$, und die Strecke QP_0 liege mit Ausnahme des Punktes Q im Inneren von $\mathfrak{B}$. Unter $\mathsf{A}^{IV}(a_1, a_2)$

[1]) Wir lassen die Sterne weg.

verstehen wir die Annäherung längs QP_0, d. h. die (geradlinige) Annäherung längs der Punkte $P(ta_1, ta_2)$, wenn $t \to 0$ strebt.

Im Falle der Annäherung A^I bezeichnen wir als obere Ordnung $\overline{\lambda}^I(Q; \mathfrak{B})$ (oder kurz $\overline{\lambda}^I(Q)$ bzw. $\overline{\lambda}^I$) bzw. untere Ordnung $\underline{\lambda}^I(Q; \mathfrak{B})$ (bzw. $\underline{\lambda}^I(Q)$, $\underline{\lambda}^I$) des Unendlichwerdens der Kernfunktion im Randpunkte $Q(0, 0)$ die untere bzw. obere Schranke derjenigen Zahlen r bzw. s, für die

$$\varrho_n^r \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) \leqq M < \infty \tag{2. 13}$$

bzw.

$$\varrho_n^s \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) \geqq m > 0 \tag{2. 14}$$

gilt, wenn z_1, z_2 im Sinne der Annäherung A^I gegen den Punkt $Q(0, 0)$ konvergiert und ϱ_n die Projektion von $\varrho = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ auf die innere Normale bedeutet.

Ist $r > \overline{\lambda}^I$ und $s < \underline{\lambda}^I$, so gilt offenbar $s < r$, und somit gilt allgemein

$$\underline{\lambda}^I \leqq \overline{\lambda}^I.$$

Ist $\underline{\lambda}^I = \overline{\lambda}^I = \lambda^I$, so sprechen wir von der Ordnung λ^I schlechthin.

Wir sagen von der Ordnung λ^I sie sei von oben bzw. unten erreichbar, wenn

$$\varrho_n^{\lambda^I} K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) \leqq M < \infty \quad \text{bzw.} \quad \varrho_n^{\lambda^I} K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) \geqq m > 0 \tag{2. 15}$$

gilt. Die Beziehungen (2. 15) für die Erreichbarkeit der Ordnung lassen sich auch schreiben:

$$\overline{L}_{\mathfrak{B}}^{I\lambda^I}(Q) = \overline{\lim} \, \varrho_n^{\lambda^I} \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \overline{L} < \infty,$$

$$\underline{L}_{\mathfrak{B}}^{I\lambda^I}(Q) = \underline{\lim} \, \varrho_n^{\lambda^I} \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \underline{L} > 0.$$

Wir nennen $\overline{L}$ bzw. $\underline{L}$ den oberen bzw. unteren Limeswert im Punkte Q. Wir sprechen vom Limespunkt λ-ter Ordnung wenn $\underline{L} = \overline{L} = L$ ist, d. h. wenn

$$L_{\mathfrak{B}}^{I\lambda^I}(Q) = \lim \varrho_n^{I\lambda^I} K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = L \tag{2. 16}$$

existiert und von Null verschieden ist. Sind z_1, z_2 normale Koordinaten im Punkte Q, so ist

$$\varrho_n = x_1 = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}. \tag{2. 17}$$

Im Falle der Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ und $\mathsf{A}^{III}(\alpha)$ ersetzen wir in der Definition der Ordnung und der Limeswerte ϱ_n durch den Abstand ϱ_t von der analytischen Ebene, die in der Tangentialhyperebene liegt. Benutzt man also wieder normale Koordinaten, so ist

$$\varrho_t = |z_1|. \tag{2. 18}$$

Die Ordnungen $\overline{\lambda}^{II}$, $\underline{\lambda}^{II}$, λ^{II} bzw. $\overline{\lambda}^{III}$, $\underline{\lambda}^{III}$, λ^{III} und insbesondere die Limeswerte hängen jetzt von dem Winkel α ab, und insbesondere werden wir für die Limeswerte die Bezeichnung

$$L_{\mathfrak{B}}^{II\lambda^{II}}(Q, \alpha) = \lim \varrho_t^{\lambda^{II}} K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}), \qquad \arg z_1 \to \alpha$$

[bzw. die entsprechende Abkürzung im Falle des oberen und unteren Limeswertes oder im Falle der Annäherung $\mathsf{A}^{III}(\alpha)$] benutzen.

In den (2. 13) bzw. (2. 14) entsprechenden Relationen ist M bzw. m eine Funktion von α, die für jedes feste α, das absolut kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, endlich bzw. positiv ist.

Im Falle der Annäherung $\mathsf{A}^{IV}(a_1, a_2)$ tritt an Stelle von ϱ_n bzw. ϱ_t die Entfernung ϱ des Punktes $P(z_1, z_2)$, der auf der Geraden QP_0 $[P_0 = P_0(a_1, a_2)]$ liegt, von Q:

$$\varrho = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = t\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2},$$

und wir führen in entsprechenden Weise die Abkürzung

$$L_{\mathfrak{B}}^{IV\lambda^{IV}}(Q; a_1, a_2) = \lim_{t\to 0}\{[t\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}]^{\lambda^{IV}} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(ta_1, ta_2; ta_1, ta_2)\}$$

ein. Bei der Definition der Ordnung sind jetzt M bzw. m Funktionen von P_0, die endlich bzw. positiv sind für jedes P_0, für welches die Strecke P_0Q (mit Ausnahme von endlich vielen Punkten) im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt.

§ 3.

Der Ersetzungskörper. Es sei

$$z_\varkappa^* = g_\varkappa(z_1, z_2) \qquad (\varkappa = 1, 2) \tag{3. 1}$$

eine analytische Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1.) Die Funktionen $g_\varkappa(z_1, z_2)$ $(\varkappa = 1, 2)$ sind in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{U}$ des Randpunktes $Q(0, 0)$ noch auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ durch ihre Grenzwerte definiert und in dem durch die Häufungspunkte ergänzten Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ mit stetigen Ableitungen versehen.

2.) Für die Funktionaldeterminante der Abbildung gilt

$$\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} D(z_1, z_2) = \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z_1, z_2)} = 1. \tag{3. 2}$$

Einen Bereich $\mathfrak{B}^*$, der aus $\mathfrak{B}$ vermöge einer solchen Transformation hervorgeht, nennen wir einen Ersetzungskörper von $\mathfrak{B}$ für den Randpunkt $Q(0, 0)$. Im Bildpunkte Q^* von Q zeigt der Körper $\mathfrak{B}^*$ dasselbe Verhalten, wie wir es für den Randpunkt Q vorausgesetzt haben. Wir nehmen im folgenden stets an, daß Q^* mit Q zusammenfällt.

Setzt man voraus, daß die Koordinaten z_1, z_2 für $\mathfrak{B}$ wie auch z_1^*, z_2^* für $\mathfrak{B}^*$ normal sind, so läßt sich die Transformation (3. 1) in der Umgebung von $Q(0, 0)$ schreiben:

$$z_1^* = \tau z_1 + g_{12}(z_1, z_2), \quad z_2^* = \alpha z_1 + \nu z_2 + g_{22}(z_1, z_2), \quad \tau > 0, \tag{3. 3}$$

wo

$$|\nu| = \frac{1}{\tau}, \quad \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \frac{g_{12}(z_1, z_2)}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} = 0, \quad \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \frac{g_{22}(z_1, z_2)}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} = 0 \tag{3. 4}$$

ist. τ bezeichnen wir als Maßfaktor der Transformation.

Ist $\mathfrak{B}^*$ Ersetzungskörper von $\mathfrak{B}$ in bezug auf den Punkt Q, so gilt für $\mathfrak{B}$ in bezug auf die Annäherung A^I oder $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$:

a.) *Die obere und untere Ordnung in Q für $\mathfrak{B}^*$ stimmen mit derjenigen für $\mathfrak{B}$ überein, so daß die Existenz einer bestimmten Ordnung in Q für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ zugleich besteht.*

b.) *Im Falle der Existenz einer bestimmten Ordnung ist diese zugleich für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ von oben bzw. von unten erreichbar.*

c.) *Im Falle der Erreichbarkeit gelten für die entsprechenden Limeswerte $\overline{L}_{\mathfrak{B}^*}(Q)$ und $\underline{L}_{\mathfrak{B}^*}(Q)$ die Relationen*

$$\overline{L}_{\mathfrak{B}^*}(Q) = \tau^\lambda \overline{L}_{\mathfrak{B}}(Q), \quad \underline{L}_{\mathfrak{B}^*}(Q) = \tau^\lambda \underline{L}_{\mathfrak{B}}(Q),$$

so daß Q für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ zugleich Limespunkt von derselben Ordnung ist und dann für die Limeswerte gilt:

$$L_{\mathfrak{B}^*}(Q) = \tau^\lambda L_{\mathfrak{B}}(Q). \tag{3. 5}$$

Alle diese Behauptungen folgen unmittelbar aus der Transformationsgleichung für die Kernfunktion:

$$(1.15)\qquad \mathsf{K}_{\mathfrak{B}^*}(z_1^*, z_2^*; \bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*) = \frac{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\left|\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z_1\, z_2)}\right|^2},$$

sowie den Limesgleichungen

$$\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \frac{\varrho_n^*}{\varrho_n} = \tau \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \frac{\varrho_t^*}{\varrho_t} = \tau$$

und (3. 2), wenn man außerdem den Nachweis erbringt, daß den Annäherungen A^I, $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ in $\mathfrak{B}$ vermöge der Transformation (3. 3) wieder Annäherungen derselben Art in $\mathfrak{B}^*$ entsprechen und umgekehrt.

Für diesen Nachweis nehmen wir für die beiden Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ normale Koordinaten an, und können dann die Transformationsgleichungen in der Form (3. 3) schreiben. Wir betrachten zunächst den Fall der Annäherung A^I. Aus (3. 3) folgt

$$(3.6)\qquad 2x_1^* = 2\,\tau x_1 + g_{12}(z_1, z_2) + \bar{g}_{12}(\bar{z}_1, \bar{z}_2),$$

und daher, wegen (3. 4) und

$$(3.7)\qquad \frac{x_1^*}{x_1} = \tau + \frac{g_{12}(z_1, z_2) + \bar{g}_{12}(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{2x_1},$$

$$\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \frac{x_1^*}{x_1} = \tau = \lim \frac{\varrho_n^*}{\varrho_n},$$

wenn die Annäherung in einem Kegel

$$(3.8)\qquad \frac{\left|\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right|}{x_1} \leqq M$$

erfolgt. Ebenso beweist man (3. 7) unter Benutzung der Umkehrungsformeln

$$(3.9)\qquad z_1 = \frac{1}{\tau} z_1^* + h_{12}(z_1^*, z_2^*), \qquad z_2 = \frac{\alpha}{\tau} z_1^* + \frac{1}{\nu} z_2^* + h_{22}(z_1^*, z_2^*),$$

wenn man statt (3. 8) die Annäherung in einem Kegel

$$(3.10)\qquad \frac{\sqrt{|z_1^*|^2 + |z_2^*|^2}}{x_1^*} \leqq N$$

in $\mathfrak{B}^*$ vorausgesetzt. Andererseits ist

$$\left|\frac{z_1^*}{x_1}\right| \leqq \tau \left|\frac{z_1}{x_1}\right| + \frac{|g_{12}(z_1, z_2)|}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{x_1},$$

$$\left|\frac{z_2^*}{x_1}\right| \leqq \alpha \left|\frac{z_1}{x_1}\right| + \frac{1}{\tau}\left|\frac{z_2}{x_1}\right| + \frac{|g_{22}(z_1, z_2)|}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{x_1}$$

$$\leqq \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{x_1}\left[\sqrt{|\alpha|^2 + \frac{1}{\tau^2}} + \frac{|g_{22}(z_1, z_2)|}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}\right],$$

woraus

$$(3.11)\qquad \frac{\sqrt{|z_1^*|^2 + |z_2^*|^2}}{x_1} \leqq \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{x_1} \text{ const.},$$

und wegen

$$\frac{\sqrt{|z_1^*|^2 + |z_2^*|^2}}{x_1^*} = \frac{\sqrt{|z_1^*|^2 + |z_2^*|^2}}{x_1} \frac{x_1}{x_1^*}$$

folgt somit unter Berücksichtigung von (3. 7), daß die Bedingung (3. 10) erfüllt ist, sobald (3. 8) besteht.

In derselben Weise folgt bei Benutzung der Umkehrungsformel (3. 9), daß die Bedingung (3. 10) die Bedingung (3. 8) nach sich zieht, womit die behauptete Äquivalenz der beiden Zulässigkeitsbedingungen in den Punkten Q und Q^* nachgewiesen ist.

Die Invarianz der Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ folgt unmittelbar aus

$$\lim_{z_1^* \to 0} \frac{y_1^*}{x_1^*} = \lim_{z_1 \to 0} \frac{y_1}{x_1} \, (= \operatorname{tg} \alpha), \tag{3. 12}$$

sobald einer von den Grenzwerten existiert.

Setzen wir die Existenz und die Stetigkeit der zweiten Ableitungen von (2. 7) voraus, so läßt sich die Gleichung der Berandungsfläche in der Umgebung des Randpunktes $Q(0, 0)$ im Falle der normalen Koordinaten schreiben:

$$2x_1 = a y_1^2 + 2 i y_1 (b z_2 - \bar{b} \bar{z}_2) + c z_2^2 + \bar{c} \bar{z}_2^2 + \sigma |z_2|^2 + \psi_2(y_1, z_2, \bar{z}_2), \tag{3. 13}$$

wo

$$\lim_{\substack{y_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} \frac{\psi_2(y_1, z_2, \bar{z}_2)}{y_1^2 + |z_2|^2} = 0, \qquad a \text{ und } \sigma \text{ reell}$$

ist.

Wir verschärfen dementsprechend die Definition des Ersetzungskörpers, in dem wir verlangen, daß bei der Transformation (3. 1) die Funktionen g_1 und g_2 in der Umgebung von Q im abgeschlossenen $\mathfrak{B}$ noch stetige zweite Ableitungen besitzen. Setzt man die Koordinaten im Körper $\mathfrak{B}$ und seinem Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ als normal voraus, so lassen sich die Transformationsgleichungen (3. 1) schreiben:

$$\begin{aligned} z_1^* &= \tau z_1 + c_{11} z_1^2 + c_{12} z_2^2 + 2 b_1 z_1 z_2 + g_{13}(z_1, z_2), \\ z_2^* &= \alpha z_1 + \nu z_2 + c_{21} z_1^2 + c_{22} z_2^2 + 2 b_2 z_1 z_2 + g_{23}(z_1, z_2), \end{aligned} \tag{3. 14}$$

$$\tau > 0, \quad |\nu| = \frac{1}{\tau}, \quad \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} \frac{g_{13}(z_1, z_2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = 0, \qquad \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} \frac{g_{23}(z_1, z_2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = 0.$$

Vermöge der Transformation (3. 1) geht der Körper $\mathfrak{B}$ in den Körper $\mathfrak{B}^*$ und die Koeffizienten $\{a, b, c\}$ in $\{a^*, b^*, c^*\}$ des Körpers $\mathfrak{B}^*$ über. Hierbei kann (wie wir bald zeigen werden) durch geeignete Wahl der Koeffizienten der Transformation (3. 14) erreicht werden, daß a^*, b^*, c^* verschwinden, dagegen kommt σ eine invariante Bedeutung zu, und zwar transformiert es sich nach der Formel

$$\sigma^* = \tau^3 \sigma \tag{3. 15}$$

bzw. im Falle allgemeiner Transformation

$$\sigma^* = \frac{\tau^3 \sigma}{|D_0|^2}, \qquad D_0 = \left[\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z_1, z_2)}\right]_{\substack{z_1 = 0 \\ z_2 = 0}}. \tag{3. 16}$$

Ist im Punkte Q für den Körper $\mathfrak{B}$ $b = c = 0$, so heißt $\mathfrak{B}$ kanonisch im Punkte $Q(0, 0)$, und ein Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ in bezug auf Q, der in Q kanonisch ist, soll kanonischer Ersetzungskörper für den Punkt Q heißen. Für die Berandungshyperfläche solcher Körper gilt also die Entwicklung

$$2x_1 = a y_1^2 + \sigma |z_2|^2 + \cdots. \tag{3. 17}$$

Einen solchen kanonischen Ersetzungskörper kann man z. B. durch Ausführung der Transformation

$$z_1^* = z_1 - 2 b z_1 z_2 - c z_2^2, \qquad z_2^* = z_2 \tag{3. 18}$$

erhalten, deren Umkehrung sich

$$z_1 = z_1^* + 2bz_1^* z_2^* + cz_2^{*2} + \cdots, \qquad z_2 = z_2^* \tag{3.19}$$

schreibt. Berücksichtigt man nämlich, daß

$$2iy_1(bz_2 - \bar{b}\bar{z}_2) = (z_1 - \bar{z}_1)(bz_2 - \bar{b}\bar{z}_2) = 2bz_1z_2 + 2\bar{b}\bar{z}_1\bar{z}_2 - (z_1 + \bar{z}_1)(bz_2 + \bar{b}\bar{z}_2)$$

ist, so folgt für den transformierten Körper

$$(z_1 + \bar{z}_1)(1 + bz_2 + \bar{b}\bar{z}_2) = ay_1^2 + \sigma|z_2|^2 + \cdots$$

(die Sterne sind weggelassen worden), somit die Entwicklung (3. 17). Nach (3. 15) ist das Vorzeichen von σ wegen $\tau > 0$ invariant gegenüber den betrachteten Transformationen.

Es ist dem Vorzeichen des Levischen Ausdruckes $L(\Phi) = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial z_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial z_2} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial\bar{z}_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_2\partial\bar{z}_1} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial\bar{z}_2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_2\partial\bar{z}_2} \end{vmatrix}$ entgegengesetzt gleich. Schreibt man nämlich die Gleichung der Berandungsfläche (vgl. (2. 7))

$$\Phi = z_1 + \bar{z}_1 - \psi\left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}, z_2, \bar{z}_2\right) = 0, \text{ so gilt } \sigma = -[L(\Phi)]_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}},$$

und das Vorzeichen von σ ist invariant gegenüber analytischen Transformationen. Seine Bedeutung erhellt aus folgendem: Betrachtet man irgendeinen kanonischen Ersetzungskörper für $\mathfrak{B}$ (oder nur einen solchen bei dem $a = 0$ ist), so gilt über die Ebene $z_1 = 0$ folgendes:

1. Für $\sigma > 0$ gilt in einer gewissen Umgebung von $z_2 = 0$ der Ebene $z_1 = 0$:

$$2x_1 - \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2) = -\sigma|z_2|^2 - \cdots < 0,$$

d. h. daß die analytische Ebene $z_1 = 0$ ganz außerhalb des kanonischen Ersetzungskörpers in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes liegt.

Den Fall $\sigma > 0$, der gewissermaßen den regulären Fall darstellt, werden wir im § 5 behandeln und in sehr allgemeinen Fällen σ aus der Kernfunktion bestimmen.

2. $\sigma < 0$. Es gilt dann:

$$2x_1 - \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2) = 2x_1 - ay_1^2 - \sigma|z_2|^2 - \cdots > 0,$$

und somit liegt eine gewisse Umgehung des Punktes $z_2 = 0$ der analytischen Ebene $z_1 = 0$ im Innern des kanonischen Ersetzungskörpers.

Hier läßt sich aber leicht zeigen, daß die Kernfunktion bei der Annäherung A^I und $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ an den Randpunkt Q beschränkt bleibt. Wir können voraussetzen, daß in der Entwicklung (3. 17) $a \leqq 0$ ist, da wir sonst vermöge der Transformation

$$z_1' = \frac{z_1}{1 + \mu z_1}, \qquad z_2' = z_2 \tag{3.20}$$

zu einem Ersetzungskörper übergehen können, für den dies gilt, und da die Annäherungen A^I und $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ hierbei sich invariant verhalten. Wenn $a \leqq 0$ ist, gilt aber für den Bereich

$$|x_1| \geqq 0, \quad |z_1| \leqq \delta_1, \quad |z_2| \leqq \delta_2 \tag{3.21}$$

bei genügend kleinen δ_1, δ_2

$$2x_1 - \sigma|z_2|^2 - \psi_2(y_1, z_2, \bar{z}_2) \geqq 0.$$

Die Punkte

$$z_1 = 0, \qquad |z_2| = \delta_2$$

liegen nach dem Vorhergesagten ganz innerhalb von $\mathfrak{B}$, haben also einen positiven Abstand $\varkappa$ von der Berandung von $\mathfrak{B}$. Betrachtet man also die Punkte

$$|z_1| \leqq \delta_1', \quad |z_2| = \delta_2$$

$\left(\text{wo } \delta_1' = \min\left(\frac{\varkappa}{2}, \delta_1\right) \text{ ist}\right)$, so haben diese Punkte eine Entfernung vom Rande von $\mathfrak{B}$, die größer als $\frac{\varkappa}{2}$ ist. Für die Kernfunktion gilt dann in den Punkten, deren Koordinaten die Ungleichungen (3. 21) befriedigen, die Abschätzung

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq \frac{32}{\pi^2 \varkappa^4} \tag{3. 22}$$

(vgl. dazu die in der Fußnote [1]) S. 3 zitierte Arbeit, S. 651, Formel (14)). Andererseits aber gilt nach der Maximumeigenschaft der Kernfunktion (vgl. S. 4) die Ungleichung (3. 22) auch für die Punkte $|z_2| \leqq \delta_2$ (die auch zu $\mathfrak{B}$ gehören). Es gilt somit in dem ganzen Bereich

$$x_1 > 0, \quad |z_1| \leqq \delta_1', \quad |z_2| \leqq \delta_2 \tag{3. 23}$$

die Ungleichung (3. 22), womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Im Falle $\sigma = 0$ kann über die Lage der analytischen Ebene $z_1 = 0$ keine solche positive Aussage gemacht werden, wir werden für $\sigma = 0$ zwei Spezialfälle behandeln (§§ 6 und 8).

Innerer und äußerer Vergleichskörper. Ein Bereich $\underline{\mathfrak{B}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}$ soll innerer bzw. äußerer Vergleichskörper des Bereiches $\mathfrak{B}$ für den Randpunkt Q heißen, wenn es einen Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ so gibt, daß

$$\underline{\mathfrak{B}} < \mathfrak{B}^* \quad \text{bzw.} \quad \overline{\mathfrak{B}} > \mathfrak{B}^* \tag{3. 24}$$

gilt und $\underline{\mathfrak{B}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}$ den Randpunkt Q^* (Bild von Q) hat und in ihm dieselbe Tangentialhyperebene wie $\mathfrak{B}^*$ besitzt. Ist nun $\underline{\mathfrak{B}}$ innerer Vergleichskörper von $\mathfrak{B}$ und ist $\mathfrak{B}^*$ der entsprechende Ersetzungskörper, so gilt zunächst für die Punkte aus $\underline{\mathfrak{B}}$ [nach (1. 12)]

$$\varrho_n^r \mathsf{K}_{\underline{\mathfrak{B}}}(z; \bar{z}) \geqq \varrho_n^r \mathsf{K}_{\mathfrak{B}^*}(z; z). \tag{3. 25}$$

Ist also $\overline{\lambda}(Q; \underline{\mathfrak{B}})$ die obere Ordnung für den inneren Vergleichskörper, so ist die Ordnung $\overline{\lambda}(Q; \mathfrak{B}^*) \leqq \overline{\lambda}(Q; \underline{\mathfrak{B}})$ und, wegen $\overline{\lambda}(Q; \mathfrak{B}) = \overline{\lambda}(Q; \mathfrak{B}^*)$,

$$\overline{\lambda}(Q; \underline{\mathfrak{B}}) \geqq \overline{\lambda}(Q; \mathfrak{B}). \tag{3. 26}$$

Ebenso folgt für den äußeren Vergleichskörper

$$\underline{\lambda}(Q; \overline{\mathfrak{B}}) \leqq \underline{\lambda}(Q; \mathfrak{B}). \tag{3. 27}$$

Ist es also möglich, den äußeren und den inneren Vergleichskörper für den Punkt Q von $\mathfrak{B}$ so zu wählen, daß

$$\underline{\lambda}(Q; \overline{\mathfrak{B}}) = \overline{\lambda}(Q; \underline{\mathfrak{B}})$$

gilt, so folgt aus $\underline{\lambda}(Q; \overline{\mathfrak{B}}) \leqq \underline{\lambda}(Q; \mathfrak{B}) \leqq \overline{\lambda}(Q; \mathfrak{B}) \leqq \overline{\lambda}(Q; \underline{\mathfrak{B}})$ die Existenz der Ordnung

$$\lambda(Q; \mathfrak{B}) = \underline{\lambda}(Q; \overline{\mathfrak{B}}) = \overline{\lambda}(Q; \underline{\mathfrak{B}}). \tag{3. 28}$$

Im Falle der Existenz einer bestimmten Ordnung $\lambda(Q; \mathfrak{B})$ des Unendlichwerdens der Kernfunktion in der Umgebung von Q gilt nach (3. 25), (3. 24) (vgl. dazu auch S. 9) über die Limeswerte $\underline{L}_{\mathfrak{B}}^{I\lambda}(Q)$, $\overline{L}_{\mathfrak{B}}^{I\lambda}(Q)$:

$$\overline{L}_{\underline{\mathfrak{B}}}^{I\lambda}(Q) \geqq L_{\mathfrak{B}_1^*}^{I\lambda}(Q) = \tau_1^{\lambda} L_{\mathfrak{B}}^{I\lambda}(Q) \text{ [1]} \tag{3. 29}$$

[1]) $\mathfrak{B}_1^*$, $\mathfrak{B}_2^*$ sind zwei Ersetzungskörper von $\mathfrak{B}$, die nicht notwendigerweise identisch zu sein brauchen.

bzw.

$$\underline{L}_{\mathfrak{B}}^{I\lambda}(Q) \leqq L_{\mathfrak{B}^*}^{I\lambda}(Q) = \tau_2^{\lambda} L_{\mathfrak{B}}^{I\lambda}(Q). \tag{3.30}$$

Ist es möglich, den inneren und äußeren Vergleichskörper für den Punkt Q derart zu konstruieren, daß die Maßfaktoren der beiden Transformationen übereinstimmen, m. a. W. daß

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau \tag{3.31}$$

ist, und daß

$$L_{\overline{\mathfrak{B}}}^{I\lambda}(Q) = L_{\underline{\mathfrak{B}}}^{I\lambda}(Q) \tag{3.32}$$

wird, so folgt aus (3. 29) und (3. 30) daß

$$\tau^{\lambda} L_{\mathfrak{B}}^{I\lambda}(Q) = L_{\overline{\mathfrak{B}}}^{I\lambda}(Q) = L_{\underline{\mathfrak{B}}}^{I\lambda}(Q) \tag{3.33}$$

existiert, d. h. daß der Punkt Q ein Limespunkt λ-ter Ordnung ist.

Im Falle der Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ bzw. $\mathsf{A}^{III}(\alpha)$ können wir auf dieselbe Weise die entsprechenden Folgerungen ziehen.

§ 4.

Für den Einheitsbizylinder $\mathfrak{E}$,

$$|z_1| \leqq 1, \quad |z_2| \leqq 1 \tag{4.1}$$

bilden bekanntlich die Funktionen

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{(m_1+1)(m_2+1)}\, z_1^{m_1} z_2^{m_2} \quad (m_k = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ k = 1, 2)$$

ein vollständiges Orthogonalsystem. Für die Kernfunktion erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_{\mathfrak{E}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m_1, m_2}^{\infty} (m_1+1)(m_2+1)\, |z_1|^{2m_1} |z_2|^{2m_2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m}^{\infty} (m+1)\, |z_1|^{2m} \sum_{m}^{\infty} (m+1)\, |z_2|^{2m} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-|z_1|^2)^2} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-|z_2|^2)^2} \\ &= \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(z_1; \bar{z}_1)\, \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_2}(z_2; \bar{z}_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wir betrachten den Randpunkt $Q(-1, \gamma)$,

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \gamma \qquad (|\gamma| < 1). \tag{4.3}$$

Setzt man

$$z_1 = z_1' - 1, \quad z_2 = z_2', \tag{4.4}$$

so erhält man nach der Ausführung der Transformation (4. 4) (die Striche werden weggelassen)

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(z_1; \bar{z}_1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{[(z_1 + \bar{z}_1) - |z_1|^2]^2}, \tag{4.5}$$

und in den neuen Koordinaten ist

$$\varrho_n = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}. \tag{4.6}$$

Es ist somit

$$\left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}\right)^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(z_1; \bar{z}_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{|z_1|^2}{z_1+\bar{z}_1}\right)^2}, \tag{4.7}$$

und da

$$\frac{|z_1|^2}{z_1+\bar{z}_1} = \left|\frac{[(z_1+\bar{z}_1)+(z_1-\bar{z}_1)]^2}{4(z_1+\bar{z}_1)}\right| = \frac{(z_1+\bar{z}_1)}{4}\left|1+\frac{2(z_1-\bar{z}_1)}{z_1+\bar{z}_1}+\frac{(z_1-\bar{z}_1)^2}{(z_1+\bar{z}_1)^2}\right|$$
$$\leqq \left(\frac{1+M}{2}\right)^2 (z_1+\bar{z}_1)\,,$$

wenn

$$\left|\frac{z_1-\bar{z}_1}{z_1+\bar{z}_1}\right| < M$$

vorausgesetzt wird, so gilt

$$\lim_{z_1\to 0}\left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}\right)^2 K_{\mathfrak{E}_1}(z_1;\bar{z}_1) = \frac{1}{4\pi}\,, \tag{4. 8}$$

und somit bei der Annäherung A^I [1])

$$L^{I2}_{\mathfrak{E}}(Q) = \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to\gamma}} \varrho_n^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}}(z_1, z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(1-|\gamma|^2)^2}. \tag{4. 9}$$

Bezeichnet man also mit $\mathsf{P}(\gamma)$ den Abbildungsradius [2]) von $\mathfrak{E}_2$ in bezug auf γ,

$$\mathsf{P}(\gamma) = (1-|\gamma|^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_2}(\gamma;\bar{\gamma})}},$$

so hat man

$$L^{I2}_{\mathfrak{E}}(Q) = \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to\gamma}} \varrho_n^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}}(z_1, z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2\mathsf{P}^2(\gamma)}\,. \tag{4. 10}$$

Die Formel (4. 10) bleibt auch gültig, wenn man statt des Bizylinders einen beliebigen Produktbereich $\mathfrak{P}$ betrachtet:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2,$$

wo $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ einfach zusammenhängende Bereiche in der z_1- bzw. z_2-Ebene sind, die von geschlossenen rektifizierbaren Jordankurven berandet sind. Bildet

$$\zeta_1 = g_1(z_1), \qquad \zeta_2 = g_2(z_2)$$

$\mathfrak{P}$ auf den Einheitsbizylinder $|\zeta_1| \leqq 1, |\zeta_2| \leqq 1$ ab, so gilt nach (1. 15) für die Kernfunktion von $\mathfrak{P}$

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{P}}(z_1 z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2) = \frac{|g_1'(z_1)|^2}{\pi[1-|g_1(z_1)|^2]^2}\cdot\frac{|g_2'(z_2)|^2}{\pi[1-|g_2(z_2)|^2]^2} = \mathsf{K}_{\mathfrak{A}_1}(z_1;\bar{z}_1)\,\mathsf{K}_{\mathfrak{A}_1}(z_2,\bar{z}_2)\,. \tag{4. 11}$$

Es sei jetzt $Q(\gamma_1,\gamma_2)$ ein Randpunkt von $\mathfrak{P}$, so daß γ_1 auf der Berandung von $\mathfrak{A}_1$, γ_2 im Innern von $\mathfrak{A}_2$ liegt. Damit die Voraussetzung über die Existenz der Tangentialhyperebene erfüllt ist, setzen wir voraus: wenn der Rand von $\mathfrak{A}_1$ (unter Zugrundelegung der Bogenlänge s als Parameter) in der Form $z_1 = w(s)$ dargestellt ist, so existiert in der Umgebung von γ_1 die Ableitung $w'(s)$. Überdies soll $w'(s)$ ebenda die Hölderbedingung $|w'(s+h) - w'(s)| \leqq k|h|^\alpha$ $(0<\alpha<1,\ k<\infty)$ erfüllen. Nach einem Satz über die konforme Abbildung am Rande[3]) besitzt dann $g_1(z_1)$ in γ_1 eine stetige Ableitung. Nun ist aber

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{A}_1}(z_1;\bar{z}_1) = \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(\zeta_1,\bar{\zeta}_1)\,|g_1'(z_1)|^2,$$

---

[1]) Hier kann die Annäherungsbedingung verschärft werden.

[2]) Wegen dieser Definition vgl. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II (Berlin 1927), S. 322.

[3]) Vgl. dazu L. Lichtenstein, Enzykl. d. math. Wissensch. II C, und Warschawski, „Über einen Satz von O. D. Kellog", Nachr. v. d. Gesell. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1932, S. 73—86, wo man die neueste Literatur über diesen Gegenstand angegeben findet.

und somit ist, wenn σ_n die Entfernung in $\mathfrak{E}_1$ bedeutet,

$$\lim_{z_1\to 0} \varrho_n^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{A}_1}(z_1;\bar{z}_1) = \lim_{\zeta_1\to 0} \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(\zeta_1;\bar{\zeta}_1)\,\varrho_n^2 |g_1'(z_1)|^2 = \lim_{\zeta_1\to 0} \sigma_n^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(\zeta_1;\bar{\zeta}_1) = \frac{1}{4\pi},$$

d. h. es ist

$$(4.12)\quad L_{\mathfrak{P}}^{II2}[Q(0,\gamma)] = \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to\gamma}} \varrho_n^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{P}}(z_1,z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi} K_{\mathfrak{A}_2}(z_2;\bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\mathsf{P}^2_{\mathfrak{A}_2}(\gamma)},$$

wo $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma$ gesetzt wurde.

Für den Bizylinder ist auch die Annäherung zweiter Art ($\mathsf{A}^{II}(\alpha)$) anwendbar. Aus

$$\lim_{z_1\to 0} \frac{|z_1|^2}{[(z_1+\bar{z}_1)-|z_1|^2]^2} = \lim_{z_1\to 0} \frac{1}{\left[\dfrac{z_1+\bar{z}_1}{|z_1|}-|z_1|\right]^2} = \frac{1}{4\cos^2\alpha},$$

wenn

$$(4.13)\qquad \lim_{z_1\to 0} \operatorname{arc} z_1 \to \alpha,$$

ergibt sich dann

$$(4.14)\qquad L_{\mathfrak{E}}^{II2}[Q(0,\gamma)] = \lim_{\substack{z_1\to 0\\ \operatorname{arc} z_1\to\alpha\\ z_2\to\gamma}} \varrho_t^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}}(z_1 z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2\cos^2\alpha\,\mathsf{P}^2(\gamma)}.$$

Der Grenzwert hängt also von dem Winkel α ab. Die letzte Grenzwertbestimmung ist auch anwendbar im Falle, wo statt des Bizylinders ein Produktbereich $\mathfrak{P}$ tritt und die Berandung von $\mathfrak{A}_1$ im Punkte $z_1 = 0$ den oben angegebenen Bedingungen genügt. Eine kleine Änderung erfährt die Formel, wenn der Punkt $z_1 = 0$ eine Spitze ist, in der die Tangenten unter dem Winkel ω zusammenstoßen [1]). Dabei ist $|\alpha| < \frac{\omega}{2}$ zu setzen. Sind nämlich $\zeta_1 = g_1(z_1)$ und $\zeta_2 = g_2(z_2)$ Funktionen, die den Bereich $\mathfrak{P}$ auf den Einheitsbizylinder abbilden, wobei der Punkt $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ in sich übergeht, so hat man

$$(4.15)\qquad |z_1|^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{P}}(z_1,z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2) = |z_1|^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(\zeta_1;\bar{\zeta}_1)\,|g_1'(z_1)|^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{A}_2}(z_2;\bar{z}_2).$$

Nun ist aber

$$\lim_{z_1\to 0} |z_1|^2 |g_1'(z_1)|^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(\zeta_1;\bar{\zeta}_1) = \lim_{\zeta_1\to 0} \frac{|z_1|^2 |g_1'(z_1)|^2}{|\zeta_1|^2} |\zeta_1|^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(\zeta_1;\bar{\zeta}_1).$$

Nach einem Satz über die konformen Abbildungen am Rande [1]) gilt

$$\lim_{\zeta_1\to 0} \frac{|z_1|^2 |g_1'(z_1)|^2}{|\zeta_1|^2} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2.$$

Andererseits gehen wegen der Quasikonformität [2]) die Punkte der Winkelhalbierenden in den Radius und der Winkel α in den Winkel $\frac{\pi\alpha}{\omega}$ über; es ist somit

$$\lim_{\zeta_1\to 0} |\zeta_1|^2 \mathsf{K}_{\mathfrak{E}_1}(\zeta_1;\zeta_1) = \frac{1}{4\pi\cos^2\frac{\pi\alpha}{\omega}}$$

---

[1]) Wir setzen voraus, daß die Ecke von zwei stetig gekrümmten Kurvenästen gebildet ist. Vgl. dazu L. Lichtenstein, „Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken", Journal f. reine und angew. Mathematik **140** (1911), S. 100, und Warschawski, „Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung", Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 321—456, wo man Angaben über die neuere Literatur findet.

[2]) Vgl. z. B. Carathéodory, „Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildung", Abhandlungen zum Doktorjubiläum von H. A. Schwarz (Berlin 1914), S. 20—41, insbesondere § 18—§ 21.

und folglich

$$L_{\mathfrak{B}}^{II2}(Q,\alpha)=\frac{1}{4\omega^2\cos^2\frac{\pi\alpha}{\omega}\,\mathsf{P}^2_{\mathfrak{A}_1}(\gamma)}. \tag{4.16}$$

Wir betrachten nunmehr die Hyperkugel $\mathfrak{K}$:

$$|z_1|^2+|z_2|^2<1.$$

Es bilden bei der Hyperkugel $\mathfrak{K}$ die Funktionen

$$C_{n_1n_2}z_1^{n_1}z_2^{n_2}, \qquad |C_{n_1n_2}|^2=\frac{1}{\pi^2}\frac{(n_1+n_2+2)!}{n_1!\,n_2!} \tag{4.17}$$

ein vollständiges Orthogonalsystem [1]), der Kern ist somit

$$\sum_{n_1,n_2}^{\infty}|C_{n_1n_2}|^2\,|z_1|^{2n_1}\,|z_2|^{2n_2}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n_1,n_2}^{\infty}\frac{(n_1+n_2+2)!}{n_1!\,n_2!}\,|z_1|^{2n_1}\,|z_2|^{2n_2}=\frac{2}{\pi^2[1-(|z_1|^2+|z_2|^2)]^3}. \tag{4.19}$$

Macht man nun die Transformation

$$z_1'=\frac{z_1}{\sigma}, \qquad z_2'=\frac{z_2}{\sigma},$$

so erhält man für die Hyperkugel $\mathfrak{K}_\sigma$, $|z_1|^2+|z_2|^2<\frac{1}{\sigma^2}$, die Kernfunktion:

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{K}_\sigma}(z_1,z_2;\bar z_1,\bar z_2)=\frac{2\sigma^4}{\pi^2[1-\sigma^2(|z_1|^2+|z_2|^2)]^3}=\frac{2}{\pi^2\,\sigma^2\left[\frac{1}{\sigma^2}-(|z_1|^2+|z_2|^2)\right]^3}. \tag{4.20}$$

Wir betrachten den Randpunkt $z_1=-\frac{1}{\sigma}$, $z_2=0$ und verlegen das Koordinatensystem so, daß vermöge

$$z_1'=z_1+\frac{1}{\sigma}, \qquad z_2'=z_2 \tag{4.21}$$

dieser Randpunkt zum Koordinatenanfangspunkt wird. Nun ist

$$\sigma^2\left|z_1-\frac{1}{\sigma}\right|\left|\bar z_1-\frac{1}{\sigma}\right|=\sigma^2|z_1|^2-\sigma|z_1+\bar z_1|+1;$$

die Kernfunktion von $\mathfrak{K}_\sigma$ lautet:

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{K}_\sigma}(z_1,z_2;\bar z_1,\bar z_2)=\frac{2\sigma}{\pi^2[(z_1+\bar z_1)-\sigma|z_1|^2-\sigma|z_2|^2]^3}. \tag{4.22}$$

Die Gleichung der Randhyperfläche von $\mathfrak{K}_\sigma$ nach Transformation (4. 21) lautet ferner

$$-(z_1+\bar z_1)+\sigma|z_1|^2+\sigma|z_2|^2=0 \quad \text{oder} \quad (z_1+\bar z_1)=\sigma|z_1|^2+\sigma|z_2|^2. \tag{4.23}$$

Die Normale ist nach innen gerichtet, und die Entwicklung (4. 23) hat die kanonische Form mit $\sigma>0$. Nach (4. 22) ist

$$L^{I3}_{\mathfrak{K}_\sigma}(Q)=\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}}\varrho_n^3\,\mathsf{K}_{\mathfrak{K}_\sigma}(z_1,z_2;z_1,z_2)=\frac{\sigma}{4\pi^2}. \tag{4.24}$$

---

[1]) Die Konstanten $C_{n_1n_2}$ bestimmen sich aus

$$|C_{n_1n_2}|^2\int_{\mathfrak{K}}|z_1|^{2n_1}\,|z_2|^{2n_2}\,d\omega=1.$$

Wir setzen $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$. Es ist dann $d\omega=r_1r_2\,d\varphi_1\,d\varphi_2\,dr_1\,dr_2$, also

$$|C_{n_1n_2}|^2\,4\pi^2\int_0^1 r_1^{2n_1+1}dr_1\int_0^{\sqrt{1-r_1^2}} r_2^{2n_2+1}\,dr_2=\frac{2\pi^2|C_{n_1n_2}|^2}{n_2+1}\int_0^1 r_1^{2n_1+1}(1-r_1^2)^{n_2+1}\,dr_1$$

$$=\frac{\pi^2|C_{n_1n_2}|^2}{n_2+1}\int_0^1 u^{n_1}(1-u)^{n_2+1}\,du=\pi^2|C_{n_1n_2}|^2\frac{n_1!\,n_2!}{(n_2+n_2+2)!}.$$

Dieses Resultat gilt, wie wir zeigen werden, unter allgemeinen Bedingungen für eine große Klasse von Körpern, wenn $\sigma > 0$ ist.

Es liegt nahe, neben der Limesrelation (4. 10), (4. 24) für die Kernfunktion analoge Relationen für die Minimalfunktion (1. 10) bzw. für die Invariante (1. 17) aufzustellen.

Im Falle des Bizylinders $\mathfrak{E}$: $|z_1 - 1| < 1$, $|z_2| < 1$, und der Hyperkugel $\mathfrak{K}_\sigma$: $\left|\frac{1}{\sigma} - z_1\right|^2 + |z_2|^2 < \frac{1}{\sigma^2}$, erhalten wir für die Minimalfunktion die Ausdrücke:

$$(4.\,25)\qquad \mathsf{M}_{\mathfrak{E}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) = \frac{[t_1 + \bar{t}_1 - |t_1|^2]^2\,[1 - |t_2|^2]^2}{[z_1 + \bar{t}_1 - z_1\bar{t}_1]^2\,[1 - z_2\bar{t}_2]^2}$$

$$\text{bzw.}\quad \mathsf{M}_{\mathfrak{K}_\sigma}(z_1, z_2, \cdot\, \bar{t}_1, \bar{t}_2) = \frac{[t_1 + t_1 - \sigma\,|t_1|^2 - \sigma\,|t_2|^2]^3}{[z_1 + \bar{t}_1 - \sigma z_1\bar{t}_1 - \sigma z_2\bar{t}_2]^3},$$

woraus man dann die Limesformeln

$$(4.\,26)\qquad \lim_{n\to\infty} n^{2-2p}\,\mathsf{M}_{\mathfrak{E}}\left(\frac{z_1}{n^p}, z_2; \frac{\bar{t}_1}{n}, \bar{t}_2\right) = \frac{(t_1 + \bar{t}_1)^2\,(1 - |t_2|^2)^2}{z_1^2(1 - z_2 t_2)^2} \qquad (0 < p < 1),$$

$$(4.\,27)\qquad \lim_{n\to\infty} n^{3-3p}\,\mathsf{M}_{\mathfrak{K}_\sigma}\left(\frac{z_1}{n^p}, \frac{z_2}{n^p}; \frac{\bar{t}_1}{n}, \frac{\bar{t}_2}{n}\right) = \frac{(t_1 + \bar{t}_1)^3}{z_1^3} \qquad (0 < p < 1)$$

gewinnt. Ebenso berechnet man leicht:

$$(4.\,28)\qquad \boldsymbol{I}_{\mathfrak{E}}(z_1, z_2,; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{I}_{\mathfrak{K}_\sigma}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{2}{9\pi^2},$$

woraus dann

$$(4.\,29)\qquad \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \boldsymbol{I}_{\mathfrak{E}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2},$$

$$(4.\,30)\qquad \lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \boldsymbol{I}_{\mathfrak{K}_\sigma}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{2}{9\pi^2}$$

folgt.

Wie im folgenden gezeigt wird, gelten bei den im § 5 bzw. § 6 betrachteten Randpunkten für die Minimalfunktion $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}$ und die Invariante $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{B}}$ den Relationen (4. 27) und (4. 30) bzw. (4. 26) und (4. 29) analoge Limesrelationen.

§ 5.

Der Fall $\sigma > 0$. Punkte dritter Ordnung. Für die Untersuchung der Punkte der Berandung mit $\sigma > 0$ legen wir zugrunde die Annäherung A^I und beweisen zunächst den

Satz I. *Ist im Punkte $Q(0, 0)$ von $\mathfrak{B}$ $\sigma > 0$, so gilt es bei der Annäherung A^I*

$$(5.\,1)\qquad \overline{\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}}}\, \varrho_n^3\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq \frac{\sigma}{4\pi^2}.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{K}_1$ die Hyperkugel

$$(5.\,2)\qquad \left|z_1 - \frac{1}{\sigma_1}\right|^2 + |z_2|^2 < \frac{1}{\sigma_1^2}, \qquad \sigma_1 > \sigma.$$

Wir behaupten, daß der Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_1\beta_1}$, der aus $\mathfrak{K}_1$ vermöge der Transformation

$$(5.\,3)\qquad z_1' = \frac{z_1}{1 + \alpha_1 z_1}, \qquad z_2' = \frac{z_2}{1 + \beta_1 z_1} \qquad (\alpha_1 > 0,\ \beta_1 \geqq 0)$$

hervorgeht, bei genügend großen α_1 und β_1 ein innerer Vergleichskörper von $\mathfrak{B}$ ist. Es sei $\mathfrak{B}^*$ ein kanonischer Ersetzungskörper von $\mathfrak{B}$, für den die Entwicklung der Randhyperfläche in der Umgebung von Q

$$(5.\,4)\qquad 2x_1 = ay_1^2 + \sigma|z_2|^2 + \cdots$$

lautet. Wir werden dann zeigen, daß der Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_1\beta_1}$ bei genügend großen α_1, β_1 innerhalb von $\mathfrak{B}^*$ liegt (und dieselbe Tangentenhyperebene wie $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}$ in Q hat).

Wendet man auf $\mathfrak{K}_1$ zunächst die Transformation

$$z_1' = \frac{z_1}{1+\alpha_1 z_1}, \qquad z_2' = z_2 \tag{5.5}$$

an, so gilt für den transformierten Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ die Darstellung

$$2x_1 = (\sigma_1 + 2\alpha_1)\, y_1^2 + \sigma |z_2|^2 + \cdots. \tag{5.6}$$

Wählt man also α_1 so groß, daß

$$\sigma_1 + 2\alpha_1 > a$$

wird, so gilt in einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}_1$ von Q

$$2x_1 - (\sigma_1 + 2\alpha_1)\, y_1^2 - \sigma_1 |z_2|^2 + \cdots \leqq 2x_1 - a y_1^2 - \sigma_2 |z_2|^2 + \cdots, \tag{5.7}$$

d. h. in $\mathfrak{U}_1$ gehört jeder Punkt von $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ auch zu $\mathfrak{B}^*$. Für die Schnitte $\mathfrak{K}_{\alpha_1}(z_1 = \gamma)$ und $\mathfrak{B}^*(z_1 = \gamma)$ der Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ und $\mathfrak{B}^*$ mit der Ebene $z_1 = \gamma$ gilt also

$$\mathfrak{K}_{\alpha_1}(z_1 = \gamma) < \mathfrak{B}^*(z_1 = \gamma), \tag{5.8}$$

wenn γ genügend klein ist, etwa

$$|\gamma| < l_1(\alpha_1) \tag{5.9}$$

ist. Betrachtet man nun den Schnitt $\mathfrak{K}_{\alpha_1}(z_2 = 0)$, d. h. den Kreis

$$\left| z_1 - \frac{1}{\sigma_1 + 2\alpha_1} \right| \leqq \frac{1}{\sigma_1 + 2\alpha_1}, \tag{5.10}$$

so liegt er auf Grund der Ungleichung (5. 7) für genügend kleine z_1 innerhalb des Schnittes $\mathfrak{B}^*(z_2 = 0)$. (Wird α_1 genügend groß gewählt, so rückt der Kreis (5. 10) in eine beliebig kleine Umgebung von $z_1 = 0$, und man kann deshalb erreichen, daß er ganz innerhalb von $\mathfrak{B}^*(z_2 = 0)$ zu liegen kommt.) Betrachtet man — nachdem α_1 den vorstehenden Bedingungen gemäß fest gewählt worden ist — die Menge $\mathfrak{V}_1$ [1]) der Werte z_1 aus dem Schnitt $\mathfrak{K}_{\alpha_1}(z_2 = 0)$, für die außer (5. 10) noch

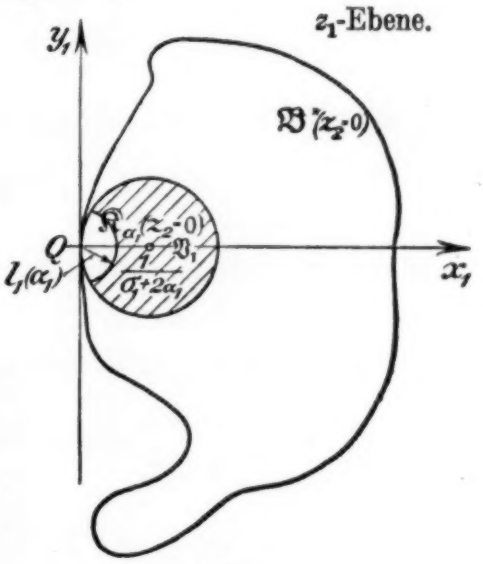

Abb. 1.

$$|z_1| > l_1(\alpha_1) \tag{5.11}$$

gilt, so sind die Punkte, die in dem Normalschnitt $\mathfrak{B}^*$ $(z_2 = 0)$ in der beliebig kleinen Umgebung von Q liegen, innere Punkte von $\mathfrak{B}^*(z_2 = 0)$. Um jeden Punkt z_1, 0 $(z_1 < \mathfrak{V}_1)$ gibt es also eine Hyperkugel mit dem Maximalradius $\varrho(z_1) > 0$, deren Inneres ganz zu $\mathfrak{B}^*$ gehört. $\varrho(z_1)$ erreicht als stetige Funktion von z_1 in dem (abgeschlossenen) $\mathfrak{V}_1$ ein positives Minimum ϱ^*. Insbesondere wird also jeder Schnitt $\mathfrak{B}^*(z_1 = \gamma)$, wenn γ zu $\mathfrak{V}_1$ gehört, einen Kreis um $z_2 = 0$ mit dem Radius ϱ^* enthalten. Betrachtet man nun die entsprechenden Schnitte $\mathfrak{K}_{\alpha_1}(z_1 = \gamma)$ des Körpers $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$, der durch

$$\left| \frac{z_1}{1-\alpha_1 z_1} - \frac{1}{\sigma_1} \right|^2_{z_1=\gamma} + |z_2|^2 \leqq \frac{1}{\sigma_1^2} \tag{5.12}$$

dargestellt wird, so sind diese nur dann nicht leer, wenn z_1 dem Kreise (5. 10) angehört, und sind selbst Kreise mit dem Mittelpunkt $z_2 = 0$ und einem Radius, der gleich oder kleiner als $\frac{1}{\sigma_1}$ ist. Wendet man nun auf $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ die Transformation

$$z_1' = z_1, \qquad z_2' = \frac{z_2}{1+\beta_1 z_1} \tag{5.13}$$

---

[1]) In der Abb. 1 schraffiert.

an, so geht der Schnitt $\mathfrak{K}_{\alpha_1}(z_1 = \gamma)$ wieder in einen Kreis um den Punkt $z_2 = 0$ mit einem Radius $\varrho(\gamma)$, für den

$$\varrho(\gamma) \leqq \frac{1}{\sigma_1 |1 + \beta_1 \gamma|}$$

gilt. Da nun in der Menge $\mathfrak{V}_1$ $|\gamma| \geqq l_1(\alpha_1)$ ist, so kann β_1 so gewählt werden, daß für sämtliche γ aus $\mathfrak{V}_1$

$$\frac{1}{\sigma_1 |1 + \beta_1 \gamma|} < \varrho^* \leqq \varrho(\gamma) \tag{5. 14}$$

gilt. Es ist dann für $|\gamma| \geqq l_1(\alpha_1)$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_1 \beta_1}(z_1 = \gamma) < \mathfrak{B}^*(z_1 = \gamma). \tag{5. 15}$$

Andererseits ist auch für die Werte $|\gamma| < l_1(\alpha_1)$ aus dem Kreis (5. 10)

$$\frac{1}{|1 + \beta_1 \gamma|} < 1,$$

da für diese Werte $\gamma + \bar{\gamma} > 0$ ist. Da somit, für $|\gamma| \leqq l_1(\alpha_1)$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_1 \beta_1}(z_1 = \gamma) < \mathfrak{K}_{\alpha_1}(z_1 = \gamma)$$

ist, so gilt in Verbindung mit (5. 8) die Beziehung (5. 15) auch für $|\gamma| < l_1(\alpha_1)$. Es ist daher

$$\mathfrak{K}_{\alpha_1 \beta_1} < \mathfrak{B}^*. \tag{5. 16}$$

Außerdem haben die beiden Körper in dem gemeinsamen Randpunkt Q dieselbe Tangentialhyperebene $z_1 + \bar{z}_1 = 0$, d. h. $\mathfrak{K}_{\alpha_1 \beta_1}$ ist ein innerer Vergleichskörper für $\mathfrak{B}$.

Nun ist $\mathfrak{K}_{\alpha_1 \beta_1}$ Ersetzungskörper von $\mathfrak{K}_1$, d. h. es ist

$$\overline{L}^{I3}_{\mathfrak{B}}(Q) = \overline{\lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}}} \varrho_n^3 \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} \varrho_n^3 \mathsf{K}_{\mathfrak{K}_1}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{\sigma_1}{4\pi^2}, \tag{5. 17}$$

und da dies für jedes $\sigma_1 > \sigma$ gilt, so ist hiermit (5. 1) bewiesen.

Satz II. *Ist für den Punkt* $Q(0, 0)$

$$\sigma > 0 \tag{5. 18}$$

und liegen außerdem die Schnitte $\mathfrak{B}^\dagger(z_1 = \gamma)$ *eines kanonischen Ersetzungskörpers* $\mathfrak{B}^\dagger$[1]) *für genügend kleine* γ *in einer beliebig vorgegebenen Umgebung von* Q, *so gilt*

$$L^{I3}_{\mathfrak{B}}(Q) = \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} \varrho_n^3 \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{\sigma}{4\pi^2}. \tag{5. 19}$$

Beweis. Zum kanonischen Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^\dagger$ gehöre die Entwicklung

$$2x_1 = a y_1^2 + \sigma |z_2|^2 + \cdots. \tag{3. 17}$$

Wir gehen wieder von einer Hyperkugel $\mathfrak{K}_2$:

$$\left| z_1 - \frac{1}{\sigma_2} \right|^2 + |z_2|^2 < \frac{1}{\sigma_2^2}, \qquad \sigma_2 < \sigma \tag{5. 20}$$

aus und behaupten, daß der Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_2 \beta_2}$ der aus $\mathfrak{K}_2$ durch die Transformation

$$z_1' = \frac{z_1}{1 - \alpha_2 z_1}, \qquad z_2' = z_2(1 + \beta_2 z_1) \tag{5. 21}$$

hervorgeht, für genügend große α_2, β_2 ein äußerer Vergleichskörper für $\mathfrak{B}^\dagger$ (in bezug auf Punkt Q) ist. Wendet man auf $\mathfrak{K}_2$ die Transformation

$$z_1' = \frac{z_1}{1 - \alpha_2 z_1}, \qquad z_2' = z_2 \tag{5. 22}$$

---

[1]) $\mathfrak{B}^\dagger$ ist wieder ein Ersetzungskörper von $\mathfrak{B}$, braucht aber nicht notwendigerweise mit $\mathfrak{B}^*$ identisch zu sein.

an, so erhält man für den transformierten Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_2}$

$$2x_1 = (\sigma_2 - 2\alpha_2)\, y_1^2 + \sigma_2 |z_2|^2 + \cdots . \tag{5. 23}$$

Wählt man nun α_2 positiv und so groß, daß

$$\sigma_2 - 2\alpha_2 < a \tag{5. 24}$$

wird, so gilt in einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}_2$ von Q

$$2x_1 - ay_1^2 - \sigma |z_2|^2 + \cdots < 2x_1 - (\sigma_2 - 2\alpha_2)\, y_1^2 - \sigma_2 |z_2|^2 + \cdots , \tag{5. 25}$$

d. h. in der Umgebung $\mathfrak{U}_2$ ist jeder Punkt von $\mathfrak{B}^\dagger$ zugleich innerer Punkt von $\mathfrak{K}_{\alpha_2}$. Die Schnitte $\mathfrak{B}^\dagger(z_1 = \gamma)$ sind also für genügend kleine γ in $\mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_1 = \gamma)$ enthalten, sobald es sich bei $\mathfrak{B}^\dagger(z_1 = \gamma)$ um Punkte der Umgebung $\mathfrak{U}_2$ handelt. Nach Voraussetzung gibt es aber außerhalb dieser Umgebung keine weiteren Punkte von $\mathfrak{B}^\dagger(z_1 = \gamma)$, wenn γ genügend klein ist, etwa

$$|\gamma| < l_2(\alpha_2). \tag{5. 26}$$

Es ist dann also

$$\mathfrak{B}^\dagger(z_1 = \gamma) < \mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_1 = \gamma), \tag{5. 27}$$

wenn γ der Ungleichung (5. 26) genügt. Wir betrachten jetzt den Schnitt $\mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_2 = 0)$. Setzen wir (was immer gestattet ist) voraus, daß

$$\sigma_2 - 2\alpha_2 < 0$$

ist, so wird der Schnitt durch das Äußere des Kreises

$$\left| z_1 - \frac{1}{\sigma_2 - 2\alpha_2} \right| < \frac{1}{2\alpha_2 - \sigma_2} \tag{5. 28}$$

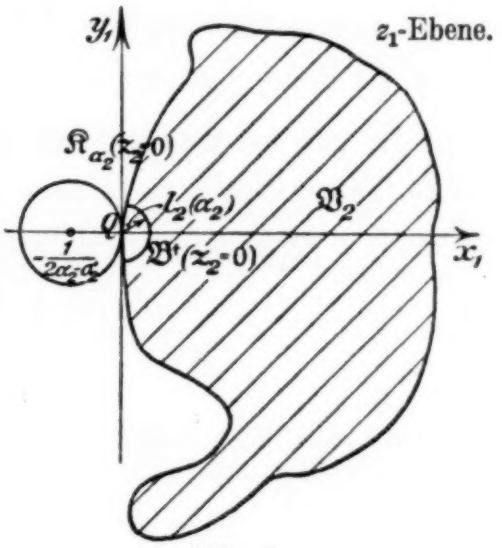

Abb. 2.

gebildet. Für genügend kleine z_1 liegt dieser Kreis nach der Ungleichung (5. 25) ganz außerhalb des Schnittes $\mathfrak{B}^\dagger(z_2 = 0)$. Wird α_2 genügend groß gewählt, so rückt der Kreis (5. 28) außerdem in eine genügend kleine Umgebung von $z_1 = 0$, und man kann deshalb erreichen, daß er ganz außerhalb von $\mathfrak{B}^\dagger(z_2 = 0)$ zu liegen kommt.

Die Menge $\mathfrak{B}_2$ [1]) derjenigen Punkte von $\mathfrak{B}^\dagger(z_2 = 0)$ (das wir uns allgemein denken), für die $|z_1| \geqq l_2(\alpha_2)$ ist, liegt dann ganz im Innern des Schnittes $\mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_2 = 0)$, d. h. sie hat mit dem abgeschlossenen Kreis (5. 28) keinen Punkt gemein. Die Schnitte $\mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_1 = \gamma)$, wo γ zur Menge $\mathfrak{B}_2$ gehört, sind Kreise mit dem Mittelpunkt $z_2 = 0$ und die Radien dieser Kreise haben dann eine positive untere Schranke r. Wendet man auf $\mathfrak{K}_{\alpha_2}$ die Transformation

$$z_1' = z_1, \quad z_2' = z_2(1 + \beta_2 z_1) \tag{5. 29}$$

an, so geht der Schnitt $\mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_1 = \gamma)$ wieder in einen Kreis über mit dem Mittelpunkt $z_2 = 0$ und einem Radius, der größer oder gleich ist als $r\,|\,1 + \beta_2 \gamma\,|$. Für die Werte von $|\gamma| > l_2(\alpha_2)$ kann β_2 so groß gewählt werden, daß

$$r\,|1 + \beta_2 \gamma| > \mathsf{P} \tag{5. 30}$$

wird, wo P so beschaffen sein soll, daß für sämtliche Schnitte $\mathfrak{B}^\dagger(z_1 = \gamma)$

$$|z_2| < \mathsf{P}$$

wird. Da der Körper $\mathfrak{B}^\dagger$ als beschränkt vorausgesetzt wird, so gibt es immer ein endliches P von dieser Art. Wird β_2 so gewählt, daß es die Ungleichung (5. 30) befriedigt, so ist für $|\gamma| \geqq l_2(\alpha_2)$

$$\mathfrak{B}^\dagger(z_1 = \gamma) < \mathfrak{K}_{\alpha_2 \beta_2}(z_1 = \gamma). \tag{5. 31}$$

---

[1]) In der Abb. 2 schraffiert.

Andererseits ist

$$|1+\beta_2\gamma|>1,$$

wenn $\beta_2 \geqq 2\alpha_2 - \sigma_2$ wird, denn die Ungleichung $|1+\beta_2\gamma|>1$, die sich auch $\left|\gamma+\frac{1}{\beta_2}\right|>\frac{1}{\beta_2}$ schreiben läßt, bedeutet, daß der Punkt γ außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $-\frac{1}{\beta_2}$ und dem Radius $\frac{1}{\beta_2}$ liegt. Für $\beta_2 > 2\alpha_2 - \sigma_2$ liegen aber sämtliche Punkte des Schnittes $\mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_2=0)$ nach (5. 29) außerhalb dieses Kreises. Somit ist für $|\gamma|<l_2(\alpha_2)$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_2\beta_2}(z_1=\gamma) > \mathfrak{K}_{\alpha_2}(z_1=\gamma), \tag{5. 32}$$

und daher erhält man in Verbindung mit (5. 31), daß die Beziehung (5. 31) auch für $|\gamma|<l_2(\alpha_2)$ richtig ist. Es ist daher

$$\mathfrak{K}_{\alpha_2\beta_2} > \mathfrak{B}^{\dagger}, \tag{5. 33}$$

und die beiden Körper haben außerdem den gemeinsamen Randpunkt Q und in ihm dieselbe Tangentialhyperebene $z_1+\bar{z}_1=0$, d. h. $\mathfrak{K}_{\alpha_2\beta_2}$ ist ein äußerer Vergleichskörper für $\mathfrak{B}^{\dagger}$. Nun sind $\mathfrak{K}_{\alpha_2\beta_2}$ und $\mathfrak{B}^{\dagger}$ Ersetzungskörper von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{B}$, es gilt somit

$$\underline{L}^{I3}_{\mathfrak{B}}(Q) = \underline{\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}}}\, \varrho_n^3 \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \geqq L^{I3}_{\mathfrak{K}_2}(Q) = \frac{\sigma_2}{4\pi^2},$$

und da dies für jedes $\sigma_2 < \sigma$ richtig ist, so hat man also

$$\underline{L}^{I3}_{\mathfrak{B}}(Q) = \underline{\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}}}\, \varrho_n^3 \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \geqq \frac{\sigma}{4\pi^2}, \tag{5. 35}$$

und in Verbindung mit der Beziehung (5. 1) folgt (5. 19).

§ 6.

Im Falle $\sigma > 0$ bzw. $\sigma < 0$ verlief bei einem kanonischen Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ die Ebene $z_1'=0$ in unmittelbarer Umgebung des Randpunktes $Q(0,0)$ mit Ausnahme des Randpunktes Q selbst ganz außerhalb oder innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}^*$. Wir setzen jetzt voraus, daß die analytische Ebene $z_1=0$ mit der Berandung von $\mathfrak{B}$ außer dem Punkt $z_2=0$ noch ein ganzes Flächenstück $\mathfrak{H}$ gemein hat, das den Punkt Q, d. h. $z_2=0$ im Innern enthält [1]). Es muß dann offenbar $\sigma=0$ sein. Wir untersuchen für $\sigma=0$ zunächst diesen Spezialfall. [Man kann die Voraussetzungen etwas allgemeiner fassen, indem man nur die Stetigkeit der ersten Ableitungen von (2. 7) fordert, womit die Existenz von σ in dem früher definierten Sinne nicht gewährleistet wird.] Wir legen außerdem die Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ und $\mathsf{A}^{III}(\alpha)$ zugrunde und benutzen stets normale Koordinaten.

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der ersten Ableitungen von (2. 7) folgt aus

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right)_{y_1=0}=0, \tag{6. 1}$$

daß für

$$|y_1|<\delta \tag{6. 2}$$

[1]) Existiert eine analytische Fläche $z_1=f(z_2)$, die durch den Punkt Q geht und ein Flächenstück mit $\mathfrak{B}$ gemein hat, wobei $f(z_2)$ in $\mathfrak{B}^*$ (der Projektion von $\mathfrak{B}$ auf $z_1=0$) eine regulär analytische und eindeutige Funktion von z_2 ist, so läßt sich vermöge der Transformation $z_1'=z_1-f(z_2)$, $z_2'=z_2$ dieser Fall auf den in diesem Paragraphen bzw. § 8 betrachteten speziellen Fall $z_1=$ const. zurückführen.

$$(6.3) \qquad |\psi(y_1, z_2, \bar{z}_2) - \psi(0, z_2, \bar{z}_2)| \leqq |y_1|\, A(z_2, \bar{z}_2), \qquad \lim_{z_2 \to 0} A(z_2, \bar{z}_2) = 0$$

gilt. Aus der an die Spitze gestellten Voraussetzung folgt für die z_2-Werte aus $\mathfrak{H}$

$$\psi(0, z_2, \bar{z}_2) = 0$$

und somit

$$(6.4) \qquad |\psi(y_1, z_2, \bar{z}_2)| \leqq |y_1|\, A(z_2, \bar{z}_2)\,.$$

Betrachtet man nur diejenigen Punkte aus $\mathfrak{B}$, für die

$$(6.5) \qquad x_1 > 0, \quad |y_1| < N x_1$$

gilt, so ist für diese Punkte

$$|\psi(y_1, z_2, z_2)| \leqq N[A(z_2, \bar{z}_2)]\, x_1\,.$$

Wird also eine Umgebung $\mathfrak{U}(\varepsilon)$,

$$(6.6) \qquad |z_2| < \varepsilon\,,$$

so gewählt, daß dort $A(z_2, \bar{z}_2) < \frac{2}{N}$ ist, was wegen (6.3) immer möglich ist, so gilt für diese z_2

$$(6.7) \qquad |\psi(y_1, z_2, \bar{z}_2)| < 2x_1,$$

d. h. die Punkte, deren Koordinaten den Ungleichungen (6.3), (6.5), (6.6) genügen, sind innere Punkte von $\mathfrak{B}$ [1]). Der Produktbereich $\mathfrak{T} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{K}$, wo

$$\mathfrak{B}: \qquad |z_1| \leqq \delta, \quad x_1 > 0, \quad |y_1| \leqq N x_1,$$

$$\mathfrak{K}: \qquad |z_2| \leqq \varepsilon$$

bedeutet, ist somit in $\mathfrak{B}$ enthalten und hat den Punkt $Q(0, 0)$ zum Randpunkt. Hat man also in $\mathfrak{B}$ eine Annäherung der Art $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$, so genügt es,

$$N > \operatorname{tg} \alpha$$

zu wählen, damit dies auch im Produktbereich $\mathfrak{T}$ eine Annäherung im Sinne der im § 3 definierten Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ sei. Man hat somit wegen $\mathfrak{T} < \mathfrak{B}$ und der Formel (1.15)

$$(6.8) \qquad \overline{\lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}}} |z_1|^2\, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} |z_1|^2\, \mathsf{K}_{\mathfrak{T}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{1}{4\,\omega^2\, \varepsilon^2 \cos^2 \dfrac{\pi\alpha}{\omega}}\,,$$

wo $\omega = 2 \operatorname{arctg} N$ ist. Es gilt somit der

Satz III. *Hat in einem Randpunkte $Q(0, 0)$ von $\mathfrak{B}$ oder vom kanonischen Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ die analytische Ebene, die in der Tangentialhyperebene von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ (im Punkte Q) liegt, mit der Berandung von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ ein ganzes Flächenstück gemein, das den Punkt Q als inneren Punkt enthält, so ist für die Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$*

$$\overline{L}^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q, \alpha) = \overline{\lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ \arc z_1 \to \alpha \\ z_2 \to 0}}} \varrho_t^2\, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1\, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

für jedes $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ endlich.

Unter schärferen Voraussetzungen beweisen wir den

Satz IV. *Der Körper $\mathfrak{B}$ bzw. ein Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ von ihm erfülle die Voraussetzungen des Satzes III. Außerdem besitze die analytische Ebene, die in der Tangentialhyperebene von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ im Punkte Q liegt, keine Punkte mit dem Inneren von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ gemein, und es gelte für die Punkte des aus $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ durch die Transformation*

$$(6.9) \qquad z_1' = \sqrt[n]{z_1}\,, \qquad z_2' = z_2$$

[1]) Das Innere von $\mathfrak{B}$ wird in der Umgebung von Q durch die Ungleichung (6.7) gegeben. Vgl. dazu auch (2.8).

entstehenden Bereiches

$$z_1' + \bar{z}_1' \geqq 0\,,$$

wenn n genügend groß ist. Q ist dann bei der Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ *für jedes* α *von der Ordnung* $\lambda = 2$.

Mit Rücksicht auf den Satz III ist nur zu beweisen, daß für jede Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$

$$\lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} \varrho_t^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) > 0 \qquad (\varrho_t = |z_1|)\,. \tag{6. 10}$$

Es sei $\mathfrak{B}'$ der Bereich, der aus $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ durch die Transformation (6. 9) entsteht. Für die Kernfunktion des transformierten Bereiches erhält man nach (1. 15)

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}'}(z_1', z_2'; \bar{z}_1' \bar{z}_2') = n^2 \, |z_1'|^{2n-2} \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

und somit

$$|z_1'|^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}'}(z_1', z_2'; \bar{z}_1', \bar{z}_2') = n^2 \, |z_1|^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)\,. \tag{6. 11}$$

Durch die Transformation (6. 9) geht die x_1-Achse in sich über, und der Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$, arc $z_1 \to \alpha$, $|\alpha| < \pi$, entspricht die Annäherung

$$\text{arc } z_1' \to \frac{\alpha}{n}\,. \tag{6. 12}$$

Bleibt also $|z_1'|^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}'}(z_1' z_2'; \bar{z}_1', \bar{z}_2')$ bei der Annäherung (6. 12) oberhalb einer positiven Schranke, so wird dasselbe für den Kern von $\mathfrak{B}$ gelten, sobald die Annäherung im Sinne von $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ geschieht. Bedeutet nun $\mathfrak{P}$ einen einfach zusammenhängenden Bereich der z_2-Ebene, der die Projektion sämtlicher Schnitte $\mathfrak{B}'(z_1 = \gamma)$ im Innern enthält (also auch $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}'(z_1 = 0)$ und den Punkt $z_2 = 0$), so wird $\mathfrak{B}'$ in dem Produktbereich

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{P}$$

liegen, wo $\mathfrak{E}$ die Halbebene $z_1' + \bar{z}_1' > 0$, $z_2' = 0$ bedeutet. Nun sei irgendeine Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ für den Punkt Q in bezug auf $\mathfrak{B}$ gegeben; im Bereich $\mathfrak{B}'$ entspricht ihr eine Annäherung mit dem Grenzwert (6. 12), die auch für den Produktbereich eine Annäherung $\mathsf{A}^{II}\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ darstellt; es ist somit

$$|z_1|^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{1}{n^2} \, |z_1'|^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}'}(z_1', z_2'; \bar{z}_1', \bar{z}_2') \geqq \frac{1}{n^2} \, |z_1'|^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{R}}(z_1', z_2'; \bar{z}_1', \bar{z}_2') > 0\,, \tag{6. 13}$$

womit die Behauptung des Satzes IV bewiesen ist.

Nachdem wir eine Klasse von Randpunkten, deren Ordnung $\lambda(Q; \mathfrak{B}) = 2$ ist, angegeben haben, werden wir in der Fortsetzung dieses Paragraphen und im § 8 zwei wichtige spezielle Typen von Randpunkten Q dieser Art kennen lernen, für die wir die Existenz der Limeswerte $L_{\mathfrak{B}}^{II2}(Q, \alpha)$ bzw. $L_{\mathfrak{B}}^{III2}(Q, \alpha)$ nachweisen werden. Um den ersten Typus dieser Randpunkte zu studieren, benötigen wir eine Hilfsfunktion $f_\nu(z)$. $f_\nu(z)$ bedeutet diejenige Funktion, die die Halbebene $z + \bar{z} > 0$ auf das Dreieck $O_1 A_1 B_1$ der w-Ebene abbildet, wo $\overline{O_1 A_1} = \overline{O_1 B_1} = 1$ ist und O_1, A_1, B_1 den Punkten $z = 0$, $z = -i$, $z = \infty$ entsprechen. Hierbei sei $\overline{OO_1}$, die positive u-Achse, und die Punkte O und O_1 besitzen die Koordinaten 0 und 1. Die Winkel OO_1B_1 und OO_1A_1 seien beide gleich je $\frac{\pi}{2\nu}$. Es ist dann

$$f_\nu(z) = 1 - t_\nu(iz)\,, \tag{6. 14}$$

wo $t_\nu(z)$ eine in einer früheren Arbeit angegebene und näher untersuchte Funktion ist [1]).

[1]) Vgl. dazu die Arbeit „Über ausgezeichnete Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Annalen **104** (1931), S. 611, § 2. Wir werden im folgenden die dort für $t_\nu(z)$ abgeleitete Abschätzung (13) benutzen.

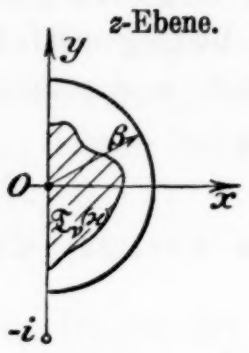

Abb. 3.

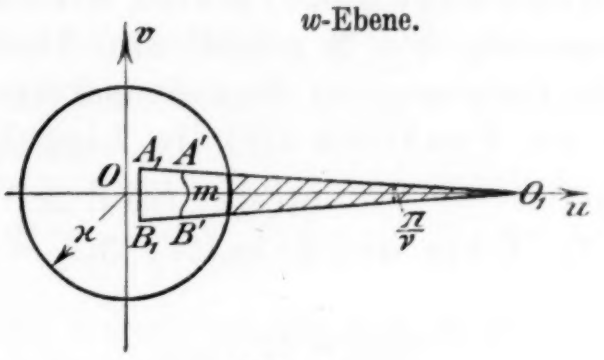

Abb. 4.

Hilfssatz I. Es sei $0 < \varkappa < 1$. In dem Gebiet $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ der z-Ebene, wo

(6. 15) $$|f_\nu(z)| > \varkappa$$

ist, gelten für genügend großes ν die Ungleichungen

(6. 16) $$|f_\nu(z)| < [1 - k(\nu)\,|z|^{\frac{1}{\nu}}], \qquad \lim_{\nu\to\infty} k(\nu) = 1,$$

(6. 17) $$|\vartheta_\nu(z)| = |\arc f_\nu(z)| < M_1\,|z|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}, \qquad 0 < M_1 < \frac{2}{\varkappa}.$$

Nach der Formel (13) der genannten Arbeit gilt für $|z| < \beta < 1$

(6. 18) $$f_\nu(z) = 1 - z^{\frac{1}{\nu}} + z^{\frac{1}{\nu}}\, g_\nu(z) = 1 - |z|^{\frac{1}{\nu}}\, e^{i\frac{\varphi}{\nu}}[1 - g_\nu(z)], \qquad \varphi = \arc z,$$

$$g_\nu(z) = O\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Betrachten wir den Halbkreis $z + \bar{z} > 0$, $|z| < \beta$, so wird das Bild $A'mB'$ (vgl. Abbildung 4) des Berandungsteiles $|z| = \beta$ für genügend großes ν in beliebige Nähe des Nullpunktes kommen, also innerhalb des Kreises

(6. 19) $$|w| < \varkappa$$

liegen. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung folgt also, daß die Punkte, für die die Ungleichung (6. 15) gilt, innerhalb des Kreises $|z| < \beta$ liegen[1]). Für diese Punkte gilt aber die Darstellung (6. 18), woraus (6. 16) unmittelbar folgt. Weiter ist für z aus $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$

(6. 20) $$|\mathbf{Im}\,[f_\nu(z)]| \leqq |1 - f_\nu(z)| \sin\frac{\pi}{2\nu} < M_2\,|z|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}, \qquad M_2 \leqq 1,$$

also für genügend großes ν $|\mathbf{Im}\,[f_\nu(z)]| \leqq \frac{\varkappa}{2}$, und somit

(6. 21) $$|\mathbf{Re}\,[f_\nu(z)]| > |f_\nu(z)| - |\mathbf{Im}\,[f_\nu(z)]| > \frac{\varkappa}{2}.$$

Aus (6. 20) und (6. 21) folgt

(6. 22) $$|\vartheta_\nu(z)| < |\operatorname{tg}\vartheta_\nu(z)| \leqq \frac{2\,M_2}{\varkappa}\,|z|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu} = M_1\,|z|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}, \qquad M_1 = \frac{2\,M_2}{\varkappa},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Für die Punkte der rechten z-Halbebene, die außerhalb von $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ liegen, gilt

(6. 23) $$|f_\nu(z)| \leqq \varkappa.$$

Es soll nunmehr eine Kategorie von Randpunkten Q beschrieben werden, von denen wir zeigen, daß sie Limespunkte zweiter Ordnung sind.

---

[1]) In der in der Fußnote genannten Arbeit ist unser β mit λ bezeichnet.

Über den Punkt $Q(0, 0)$ setzen wir voraus, daß der Schnitt $\mathfrak{H}=\mathfrak{B}(z_1=0)$[1]) (der zur Berandung von $\mathfrak{B}$ gehört) ein Sternbereich in bezug auf $z_2=0$ ist, d. h. daß die Gleichung der Berandungskurve $R=h(\theta)$ lautet, und setzen außerdem voraus, daß die Funktion $h(\theta)$ die Lipschitzbedingung

$$|h(\theta)-h(\theta')| \leqq N_1 |\theta-\theta'|, \qquad N_1 < \infty, \tag{6. 24}$$

befriedigt[2]). Über die Schnitte $\mathfrak{B}(z_1=\gamma)$ setzen wir voraus, daß sobald $|\gamma| < \delta$ ist,

$$\frac{\mathfrak{B}(z_1=0)}{m(|\gamma|)} < \mathfrak{B}(z_1=\gamma) < m(|\gamma|)\,\mathfrak{B}(z_1=0) \tag{6. 25}$$

gilt, wo δ eine beliebig kleine vorgegebene positive Größe bedeutet und

$$m(|\gamma|) = 1 + N_2 |\gamma|^{\frac{1}{\tau}}, \qquad 0 < \tau < \infty,\ N_2 < \infty$$

ist. (Dabei verstehen wir unter $m(|\gamma|)\,\mathfrak{B}(z_1=0)$ den aus $\mathfrak{B}(z_1=0)$ vermöge der Transformation $z_2' = m(|\gamma|) z_2$ entstandenen Bereich.) Aus (6. 24) folgt, daß für jedes z_2 aus dem Schnitt $\mathfrak{B}(z_1=\gamma)$ die Ungleichung

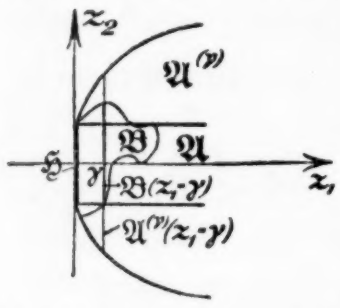

Abb. 5. (Schem. Darstellung.)

$$\frac{h(\arg z_2)}{1+N_2|\gamma|^{\frac{1}{\tau}}} \leqq |z_2| \leqq (1+N_2|\gamma|^{\frac{1}{\tau}})\, h(\arg z_2) \tag{6. 26}$$

gilt, sobald $|\gamma| < \delta$ ist.

Endlich soll für den Körper $\mathfrak{B}$ $z_1 + \bar{z}_1 \geqq 0$ sein.

Wir konstruieren nun einen Körper $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ in folgender Weise. Es bedeute $\mathfrak{E}$ die Halbebene $z_1 + \bar{z}_1 \geqq 0$, und wir bilden den Produktbereich

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}.$$

Der Bereich $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ entstehe aus $\mathfrak{A}$ vermöge der Transformation

$$z_1' = z_1, \qquad z_2' = \frac{z_2}{f_\nu(z_1)}. \tag{6. 27}$$

Bedeutet $h_{\min}$ eine untere Schranke für die $h(\theta)$ (d. h. gilt $0 < h_{\min} \leqq h(\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) und $Z_2^{\max}$ die obere Schranke aller $|z_2|$ Koordinaten des Körpers $\mathfrak{B}$, so soll $\varkappa$ (vgl. den Hilfssatz I) dabei so gewählt werden, daß

$$0 < \varkappa < \frac{h_{\min}}{Z_2^{\max}} \leqq 1 \tag{6. 28}$$

gilt. Nachdem $\varkappa$ fest gewählt wurde, wählen wir ν so groß, daß erstens die Ungleichungen (6. 16), (6. 17), (6. 23) gültig sind, und daß

$$\nu > 2\tau, \qquad k(\nu) \geqq \frac{1}{2} \tag{6. 29}$$

ist. Bezeichnet man ferner mit β den Radius eines Kreises um $z_1=0$, in dessen Innern $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ liegt, so soll schließlich ν so groß genommen werden, daß

$$N_2[\beta(\varkappa,\nu)]^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\nu}} < \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{N_1 M_1}{h_{\min}} \sin\frac{\pi}{2\nu}\right] \qquad \left(M_1 \leqq \frac{2}{\varkappa}\right), \tag{6. 30}$$

$$\beta(\varkappa,\nu) < \delta \tag{6. 31}$$

gilt[3]).

---

[1]) Vgl. dazu Fußnote [1]) S. 21.

[2]) Die Ungleichung (6. 24) kann man durch $|h(\theta)-h(\theta)| \leqq N_1 |\theta-\theta'|^\mu$ $(\mu > 0)$ ersetzen. Die folgenden Betrachtungen erleiden dann eine unwesentliche Modifikation.

[3]) Die Möglichkeit, β so zu bestimmen, daß es (6. 30) und (6. 31) befriedigt, folgt daraus, daß bei festem $\varkappa$ und bei genügend großem ν das Gebiet $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ ins Innere eines beliebig kleinen Kreises um $z=0$ zu liegen kommt (vgl. dazu den Beweis des Hilfssatzes).

Wir betrachten zunächst die Schnitte $\mathfrak{A}^{(\nu)}(z_1 = \gamma)$ für γ aus $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$, wo $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ der auf der Seite 25 angegebene Bereich ist. Der Schnitt $\mathfrak{A}(z_1 = \gamma)$ ergibt für alle Punkte von $\mathfrak{E}$ den Sternbereich $\mathfrak{H}$. Es wird somit auch jeder Schnitt $\mathfrak{A}^{(\nu)}(z_1 = \gamma)$ wieder ein Sternbereich sein, dessen Berandung die Gleichung

$$(6.\,32) \qquad R = h(\gamma, \theta) = \frac{h[\theta + \vartheta_\nu(\gamma)]}{|f_\nu(\gamma)|}, \qquad \text{arc } f_\nu(\gamma) = \vartheta_\nu(\gamma),$$

besitzt. Nun ist für das von uns gewählte ν nach [(6. 29) und (6. 16)]

$$(6.\,33) \qquad |f_\nu(\gamma)| \leqq 1 - \frac{1}{2}|\gamma|^{\frac{1}{\nu}}$$

und [nach (6. 24) und (6. 17)]

$$(6.\,34) \quad h[\theta + \vartheta_\nu(\gamma)] \geqq h(\theta) - N_1|\vartheta_\nu(\gamma)| \geqq h(\theta) - N_1 M_1 |\gamma|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}$$

$$\geqq h(\theta)\left[1 - \frac{N_1 M_1}{h_{\min}}|\gamma|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}\right] = h(\theta)\left[1 - N_3|\gamma|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}\right], \qquad N_3 = \frac{N_1 M_1}{h_{\min}},$$

und somit

$$(6.\,35) \qquad h(\gamma, \theta) \geqq h(\theta)\left[1 - N_3|\gamma|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}\right]\left[1 + \frac{1}{2}|\gamma|^{\frac{1}{\nu}}\right];$$

andererseits gilt nach (6. 26) für die z_2 Koordinate eines Punktes, der in $\mathfrak{B}(z_1 = \gamma)$ liegt,

$$(6.\,36) \qquad |z_2| \leqq h(\theta)\,[1 + N_2|\gamma|^{\frac{1}{\tau}}], \qquad \theta = \text{arc } z_2.$$

Da nun nach (6. 30) für $|\gamma| \leqq \beta$

$$(6.\,37) \qquad 1 + (N_2|\gamma|^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\nu}})\,|\gamma|^{\frac{1}{\nu}} < 1 + |\gamma|^{\frac{1}{\nu}}\left[\frac{1}{2} - N_3 \sin\frac{\pi}{2\nu} - \frac{1}{2}N_3|\gamma|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}\right]$$

gilt, folgt (für γ aus $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$)

$$(6.\,38) \qquad |z_2| < h(\gamma,\ \text{arc } z_2), \qquad z_2 < \mathfrak{B}(z_1 = \gamma),$$

d. h. (6. 38 a) $$\mathfrak{A}^{(\nu)}(z_1 = \gamma) > \mathfrak{B}(z_1 = \gamma).$$

Für die γ-Werte, die außerhalb von $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ liegen, ist nach (6. 23)

$$(6.\,39) \qquad |f_\nu(\gamma)| \leqq \varkappa.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{H}_{\min}$ einen Kreis vom Radius $h_{\min}$ und mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt, mit $\mathfrak{Z}^{\max}$ einen Kreis mit Radius $Z_2^{\max}$ und gleichem Mittelpunkt, so ist nach (6. 38) und (6. 39) für γ außerhalb von $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$

$$(6.\,40) \qquad \mathfrak{A}^{(\nu)}(z_1 = \gamma) > \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{H}_{\min} > \frac{Z_2^{\max}}{h_{\min}}\,\mathfrak{H}_{\min} = \mathfrak{Z}^{\max} > \mathfrak{B}(z_1 = \gamma),$$

woraus in Verbindung mit (6. 38a) folgt:

$$(6.\,41) \qquad \mathfrak{A}^{(\nu)} > \mathfrak{B}.$$

Nun entsteht $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ aus $\mathfrak{A}$ vermöge der Transformation (6. 27), und es ist

$$(6.\,42) \qquad \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0}} \frac{\partial(z_1', z_2')}{\partial(z_1, z_2)} = \lim_{z_1 \to 0} \frac{1}{f_\nu(z_1)} = 1.$$

Nach (1. 15) und (6. 42) gilt also

$$(6.\,43) \qquad L^{II2}_{\mathfrak{A}^{(\nu)}}(Q) = L^{II2}_{\mathfrak{A}}(Q) = \frac{1}{4\pi^2 \cos^2 \alpha\, \mathsf{P}^2},$$

wo P der Abbildungsradius von $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(z_1 = 0)$ in bezug auf $z_2 = 0$ ist, und somit nach (6. 41)

$$L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q) \geqq \frac{1}{4\pi^2 \cos^2\alpha \; \mathsf{P}^2}. \tag{6. 44}$$

Wir konstruieren nunmehr den inneren Vergleichskörper. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{D}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ und $\mathfrak{B}(z_2 = 0)$[1]). Wir betrachten den Produktbereich

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{H}$$

und wenden auf ihn die Transformation

$$z_1' = z_1, \qquad z_2' = z_2 f_\nu(z_1) \tag{6. 45}$$

an. Es ist dann für den transformierten Körper $\mathfrak{D}^{(\nu)}$

$$\mathfrak{D}^{(\nu)}(z_1 = \gamma) = f_\nu(\gamma)\, \mathfrak{D}(z_1 = \gamma) = f_\nu(\gamma)\, \mathfrak{H}. \tag{6. 46}$$

$\mathfrak{D}^{(\nu)}(z_1 = \gamma)$ ist wieder ein Sternbereich. Die Gleichung der Berandungskurve lautet

$$R = h^*(\gamma, \theta) = h[\theta - \vartheta_\nu(\gamma)]\, |f_\nu(\gamma)|, \tag{6. 46 a}$$

und es ist somit für die Schnitte $\mathfrak{B}(z_1 = \gamma)$

$$h^*(\gamma, \theta) \leqq h(\theta)\left[1 + N_3 |\gamma|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}\right]\left[1 - \frac{1}{2}|\gamma|^{\frac{1}{\nu}}\right].$$

Andererseits gilt nach (6. 25)

$$|z_2| > h(\theta)\,[1 - N_2 |\gamma|^{\frac{1}{\tau}}], \qquad z_2 < \mathfrak{B}(z_1 = \gamma), \quad \theta = \arg z_2,$$

und somit gilt, falls ν den früheren Bedingungen [(6. 16), (6. 17) u. a.] gemäß genügend groß gewählt wird,

$$1 - N_2 |\gamma|^{\frac{1}{\tau}} \geqq 1 - |\gamma|^{\frac{1}{\nu}}\left[\frac{1}{2} - N_3 \sin\frac{\pi}{2\nu} + \frac{1}{2} N_3 |\gamma|^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\pi}{2\nu}\right].$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{D}^{(\nu)}(z_1 = \gamma) < \mathfrak{B}(z_1 = \gamma) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}^{(\nu)} < \mathfrak{B} \tag{6. 47}$$

und daher

$$L^{II2}_{\mathfrak{D}^{(\nu)}}(Q, \alpha) \geqq L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q, \alpha).$$

Nun ist aber nach (6. 42)

$$L^{II2}_{\mathfrak{D}^{(\nu)}}(Q, \alpha) = L^{II2}_{\mathfrak{D}}(Q, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2 \cos^2\alpha \; \mathsf{P}^2}, \tag{6. 48}$$

so daß der Vergleich von (6. 44), (6. 48) ergibt:

$$L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2 \cos^2\alpha \; \mathsf{P}^2}. \tag{6. 49}$$

§ 7.

Im folgenden wird der schon in § 6 untersuchte Fall, daß die analytische Tangentialebene $z_1 = 0$ mit der Berandung des Körpers $\mathfrak{B}$ ein Flächenstück gemeinsam hat, unter anderen Voraussetzungen für $\mathfrak{B}$ behandelt. Die Ausführungen dieses Paragraphen dienen dazu, durch Einführung und Untersuchung einer gewissen Klasse von speziellen Bereichen Hilfsmittel hierfür zu schaffen.

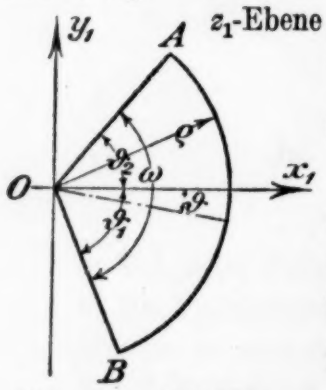

Abb. 6. „$\mathfrak{S}$-Sektor".

Unter einem Sektor $\mathfrak{S}$ verstehen wir in diesem Paragraphen einen Kreissektor OAB in der z_1-Ebene, dessen Spitze O in dem Punkt $z_1 = 0$ liegt. Er ist vollständig festgelegt durch die Winkel ϑ_1 und $\vartheta_2 (> \vartheta_1)$, die seine beiden Schenkel mit einer festen Richtung, etwa der positiven x_1-Achse, bilden und den Radius $\varrho = \overline{OA} = \overline{OB}$ des Kreises. Wir bezeichnen den Sektor $\mathfrak{S}$ in seiner

[1]) Bzw. den einfachzusammenhängenden Teil mit dem Randpunkt $z_2 = 0$ dieses Durchschnittes.

Abhängigkeit von $\vartheta_1, \vartheta_2, \varrho$ auch als $\mathfrak{S}(\vartheta_1, \vartheta_2, \varrho)$. Wir betrachten im folgenden Bereiche $\mathfrak{S}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Schnitte $\mathfrak{S}(z_2 = \gamma)$ sind nur für γ-Werte, die einem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{H}$ in der z_2-Ebene angehören, nicht leer und sind dann $\mathfrak{S}$-Sektoren.

2. Für die Bestimmungsstücke $\vartheta_1, \vartheta_2, \varrho$ des Schnittes $\mathfrak{S}(z_2 = \gamma)$, die jetzt Funktionen von γ sind, gilt

$$\vartheta_2(\gamma) - \vartheta_1(\gamma) = \omega = \text{const.} > 0, \qquad \varrho = \text{const.} \tag{7.1}$$

3. $\vartheta(\gamma) = \dfrac{\vartheta_2(\gamma) + \vartheta_1(\gamma)}{2}$

ist eine (gleichmäßig) stetige Funktion in $\mathfrak{H}$.

4. Es existiert ein (von γ unabhängiger) Sektor $\mathfrak{S}(\vartheta_1^{(0)}, \vartheta_2^{(0)}, \varrho)$, der mit sämtlichen $\mathfrak{S}(z_2 = \gamma) = \mathfrak{S}[\vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma), \varrho]$ nur den Punkt $z_1 = 0$ gemeinsam hat [1]). (Außensektor).

5. Es gibt ein positives β, so daß

$$-\pi + \beta \leqq \vartheta_1(\gamma)\frac{\pi}{\omega}, \qquad \vartheta_2(\gamma)\frac{\pi}{\omega} \leqq \pi - \beta \qquad (0 < \beta < \pi). \tag{7.2}$$

In sämtlichen $\mathfrak{S}[\vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma), \varrho]$ ist ein fester Sektor $\mathfrak{S}_1(\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}\varrho)$ mit $\vartheta_2^{(1)} - \vartheta_1^{(1)} > 0$ enthalten.

Wir wählen zur positivem x_1-Achse einen Strahl, der im Innern des Sektors $\mathfrak{S}(\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}, \varrho)$ liegt. Es ist dann

$$\vartheta_{1\,\text{sup}} < 0 < \vartheta_{2\,\text{inf}} \quad [\vartheta_{1\,\text{sup}} = \text{obere Grenze v. } \vartheta_1(\gamma),\ \vartheta_{2\,\text{inf}} = \text{untere Grenze v. } \vartheta_2(\gamma)]. \tag{7.3}$$

Wir schreiben im folgenden zuweilen anstatt $\mathfrak{S}(\vartheta_1, \vartheta_2, \varrho)$ auch $\mathfrak{T}(\vartheta, \omega, \varrho)$.
Durch die Transformation

$$\tilde{z}_1 = \mu z_1, \qquad \tilde{z}_2 = z_2 \qquad (\mu > 0), \tag{7.4}$$

$$\text{bzw.} \quad \tilde{z}_1 = e^{i\theta} z_1, \qquad \tilde{z}_2 = z_2 \qquad (\theta \text{ reell}), \tag{7.5}$$

$$\text{bzw.} \quad \tilde{z}_1 = z_1^{\beta}, \qquad \tilde{z}_2 = z_2 \tag{7.6}$$

geht der Bereich $\mathfrak{S}$ wieder in einen Bereich $\tilde{\mathfrak{S}}$ mit denselben Eigenschaften [2]) über, und für die Bestimmungsstücke gilt dann:

$$\tilde{\vartheta}_2(\gamma) = \vartheta_2(\gamma), \quad \tilde{\vartheta}_1(\gamma) = \vartheta_1(\gamma), \quad \tilde{\varrho} = \mu\varrho, \ \tilde{\omega} = \omega, \quad \tilde{\vartheta}(\gamma) = \vartheta(\gamma), \tag{7.7}$$

$$\text{bzw.} \quad \tilde{\vartheta}_2(\gamma) = \vartheta_2(\gamma) + \theta, \quad \tilde{\vartheta}_1(\gamma) = \vartheta_1(\gamma) + \theta, \quad \tilde{\varrho} = \varrho, \ \tilde{\omega} = \omega, \quad \tilde{\vartheta}(\gamma) = \vartheta(\gamma) + \theta, \tag{7.8}$$

$$\text{bzw.} \quad \tilde{\vartheta}_2(\gamma) = \beta\vartheta_2(\gamma), \quad \tilde{\vartheta}_1(\gamma) = \beta\vartheta_1(\gamma), \quad \tilde{\varrho} = \varrho^{\beta}, \ \tilde{\omega} = \beta\omega, \quad \tilde{\vartheta}(\gamma) = \beta\vartheta(\gamma). \tag{7.9}$$

Wir untersuchen bei $\mathfrak{S}$-Bereichen das Verhalten der Kernfunktion in der Umgebung des Randpunktes $Q(0, a_2)$, wo a_2 ein innerer Punkt von $\mathfrak{H}$ ist. Im Punkte $Q(0, a_2)$ existiert im allgemeinen (mit Ausnahme von $\omega = \pi$) keine Tangentialhyperebene. Wir können aber auch hier in Analogie zur Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ den entsprechenden Annäherungs- und Ordnungsbegriff einführen. Als Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ soll hier

$$\begin{gathered} z_1 \to 0, \quad z_2 \to a_2, \\ \arg z_1 \to \alpha, \quad |\alpha - \vartheta(a_2)| < \frac{\omega}{2} \end{gathered} \tag{7.10}$$

verstanden werden. Wir betrachten

$$|z_1|^2\, \mathsf{K}_{\mathfrak{S}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \tag{7.10a}$$

---

[1]) Ev. auch den Punkt $z_1 = \infty$.

[2]) Damit bei (7.6) die Eigenschaft 4 nicht verloren geht, muß man ev. $\tilde{\mathfrak{S}}$ im Riemannschen (mehrfach überdeckten) Raume betrachten.

bei dieser Annäherung und werden insbesondere die Existenz von

$$(7.11)\qquad L_{\mathfrak{S}}^{II2}[Q(0,a_2),\alpha]=\lim_{\substack{t\to 0\\ \varphi\to\alpha\\ z_1\to a_1}} t^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{S}}(te^{i\varphi},z_2;te^{-i\varphi},\bar{z}_2)$$

beweisen, wo $te^{i\varphi}(t<\varrho)$ einen inneren Punkt aus dem Schnitt $\mathfrak{S}(z_2=a_2)$ bedeutet und t reell und positiv ist.

Bei den Transformationen (7. 4), (7. 5), (7. 6) gilt für die Kernfunktionen:

$$(7.12)\qquad |z_1|^2\,\mathsf{K}_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z_1,z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2)=\left|\frac{z_1}{\mu}\right|^2\mathsf{K}_{\mathfrak{S}}\left(\frac{z_1}{\mu},z_2;\frac{\bar{z}_1}{\mu},\bar{z}_2\right),$$

$$(7.13)\quad \text{bzw.}\quad |z_1|^2\,\mathsf{K}_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z_1,z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2)=|z_1|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{S}}\left(\frac{z_1}{e^{i\vartheta}},z_2;\frac{\bar{z}_1}{e^{-i\vartheta}},\bar{z}_2\right),$$

$$(7.14)\quad \text{bzw.}\quad |z_1|^2\,\mathsf{K}_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z_1,z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2)=\frac{1}{\beta^2}\,|z_1^{\frac{1}{\beta}}|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{S}}(z_1^{\frac{1}{\beta}},z_2;\bar{z}_1^{\frac{1}{\beta}},\bar{z}_2).$$

Ersetzt man bei dem Körper $\mathfrak{S}$ den Parameter t durch μt, so sind die zu untersuchenden Ausdrücke (7.10 a) nach (7.12) in beiden Bereichen identisch. Andererseits hat aber der Bereich $\tilde{\mathfrak{S}}$ bei gleichen $\vartheta(\gamma)$ und ω den Radius $\tilde{\varrho}=\mu\varrho$. Für die Untersuchung ist also die Größe von ϱ gleichgültig, und auch der Limeswert (7. 11) ist von ϱ vollständig unabhängig.

Eine besonders wichtige Klasse der $\mathfrak{S}$-Bereiche bilden die $\mathfrak{S}^{\dagger}$-Bereiche, bei denen $\varrho=\infty$ wird. Durch die Transformation (7. 4) wird ein $\mathfrak{S}^{\dagger}$-Bereich in sich übergeführt. Setzt man also $z=te^{i\varphi}$, so ist nach (7. 12)

$$(7.15)\qquad |t|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{S}^{\dagger}}(te^{i\varphi},z_2;te^{-i\varphi},\bar{z}_2)$$

eine von t unabhängige Funktion. Ist $\mathfrak{H}_m$ ein ganz im Innern von $\mathfrak{H}$ gelegener (einfach zusammenhängender) Teilbereich von $\mathfrak{H}$, so soll mit $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1+\varepsilon,\vartheta_2-\varepsilon)$ der folgende Variabilitätsbereich von (z_2,α) verstanden werden:

z_2 ist ein Punkt von $\mathfrak{H}_m$ und das zugehörige α ein Punkt des Intervalles

$$(7.16)\qquad \vartheta_1(z_2)+\varepsilon\leqq\alpha\leqq\vartheta_2(z_2)-\varepsilon.$$

Für Werte (z_2,α) aus $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1+\varepsilon,\vartheta_2-\varepsilon)$ ist für festes $t=t_0>0$ der Ausdruck (7. 15) eine gleichmäßig stetige Funktion von α und z_2. (Vgl. dazu § 1, S. 6.) Da nun (7. 15) eine von t unabhängige Funktion ist, so gilt der

Hilfssatz II. Für (a_2,α) aus $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1+\varepsilon,\vartheta_2-\varepsilon)$ existiert

$$(7.17)\qquad L_{\mathfrak{S}^{\dagger}}^{II2}[Q(0,a_2),\alpha]=\lim_{\substack{t\to 0\\ \varphi\to\alpha\\ z_1\to a_1}}|t|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{S}^{\dagger}}(te^{i\varphi},z_2;te^{-i\varphi},\bar{z}_2)$$

und stellt eine in $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1+\varepsilon,\vartheta_2-\varepsilon)$ $[\varepsilon>0]$ gleichmäßig stetige Funktion von a_2 und α dar.

Hilfssatz III. Die Folge der Bereiche[1])

$$\mathfrak{S}^{\dagger(m)}=\Sigma\,\mathfrak{S}^{\dagger(m)}(z_2=\gamma)=\sum_{\gamma}^{\mathfrak{d}}S[\vartheta_1^{(m)}(\gamma),\vartheta_2^{(m)}(\gamma),\infty]\qquad(m=1,2,3,4,\ldots)$$

konvergiere gegen den Bereich

$$(7.17\text{a})\qquad \mathfrak{S}^{\dagger}=\Sigma\,\mathfrak{S}^{\dagger}(z_2=\gamma)=\sum_{\gamma}^{\mathfrak{d}}S[\vartheta_1(\gamma),\vartheta_2(\gamma),\infty]$$

in dem Sinne, daß für jedes γ

$$(7.18)\qquad \vartheta^{(m)}(\gamma)\to\vartheta(\gamma)\quad\text{und}\quad\omega^{(m)}\to\omega$$

[1]) Wegen der Schreibweise $\sum_{\gamma}^{\mathfrak{d}}$ vgl. z. B. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin 1927, § 1.

gilt und zwar gleichmäßig in $\mathfrak{H}$. Es gilt dann

$$\lim_{m\to\infty} L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger(m)}}[Q(0, a_2), \alpha] = L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger}}[Q(0, a_2), \alpha]. \tag{7.19}$$

Beweis. Wir wenden auf den Bereich $\mathfrak{E}^{\dagger}$ die Transformation

$$\tilde{z}_1 = z_1^{1-\tau}, \quad \tilde{z}_2 = z_2, \qquad \tau > 0, \tag{7.20}$$

an. Der neu entstandene Bereich $\tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger}$ ist wieder ein $\mathfrak{E}^{\dagger}$-Bereich mit den Winkeln

$$\tilde{\vartheta}_1(\gamma) = (1-\tau)\,\vartheta_1(\gamma), \quad \tilde{\vartheta}_2(\gamma) = (1-\tau)\,\vartheta_2(\gamma).$$

Da

$$\vartheta_1(\gamma) < 0, \qquad \vartheta_2(\gamma) > 0 \tag{7.21}$$

ist, so gilt

$$\tilde{\vartheta}_1(\gamma) = (1-\tau)\ \vartheta_1(\gamma) > \vartheta_1(\gamma), \quad \tilde{\vartheta}_2(\gamma) = (1-\tau)\ \vartheta_2(\gamma) < \vartheta_2(\gamma), \tag{7.22}$$

und für genügend großes m gilt wegen (7. 21), (7. 3) und (7. 18)

$$\tilde{\vartheta}_1(\gamma) > \vartheta_1^{(m)}(\gamma), \qquad \tilde{\vartheta}_2(\gamma) < \vartheta_2^{(m)}(\gamma). \tag{7.23}$$

Es ist somit für genügend großes m

$$\mathsf{S}[\tilde{\vartheta}_1(\gamma), \tilde{\vartheta}_2(\gamma), \infty] < \mathsf{S}[\vartheta_1^{(m)}(\gamma), \vartheta_2^{(m)}(\gamma), \infty], \quad \text{d. h.} \quad \tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger} < \mathfrak{E}^{\dagger(m)}, \tag{7.24}$$

und hieraus bei der Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$

$$\lim_{\substack{|z_1|\to 0\\ \arg z_1\to\alpha\\ z_2\to a_2}} |z_1|^2\, \mathsf{K}_{\mathfrak{E}^{\dagger(m)}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq \lim_{\substack{|z_1|\to 0\\ \arg z_1\to\alpha\\ z_2\to a_2}} |z_1|^2\, \mathsf{K}_{\tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2),$$

also auch

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger(m)}} Q(0, a_2), \alpha] \leqq L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger}}[Q(0, a_2), \alpha].$$

Nun ist nach (7. 14)

$$L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger}}[Q(0, a_2), \alpha] = \frac{1}{(1-\tau)^2}\, L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger}}\left[Q(0, a_2), \frac{\alpha}{1-\tau}\right]. \tag{7.25}$$

Da τ beliebig nahe an 0 gebracht werden kann und $\mathrm{L}^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger}}[Q(0, a_2), \alpha]$ eine stetige Funktion von α ist, folgt

$$\overline{\lim}\, L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger(m)}}[Q(0, a_2), \alpha) \leqq L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger}}[Q(0, a_2), \alpha]. \tag{7.26}$$

Macht man dagegen die Transformation

$$\tilde{\tilde{z}}_1 = z_1^{1+\tau}, \qquad \tilde{\tilde{z}}_2 = z_2, \tag{7.27}$$

so ergibt sich in derselben Weise, daß für genügend großes m

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{E}}}^{\dagger} > \mathfrak{E}^{\dagger(m)} \tag{7.28}$$

ist, und hieraus

$$\underline{\lim}\, L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger(m)}}[Q(0, a_2), \alpha] \geqq L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger}}[Q(0, a_2), \alpha]. \tag{7.29}$$

Aus (7. 26) und (7. 29) folgt (7. 19), w. z. b. w.

Unter einem $\mathfrak{Z}$-Kreis verstehen wir einen Kreis mit dem Mittelpunkt in $\frac{Re^{i\vartheta(\gamma)}}{2\cos\vartheta(\gamma)}$ und dem Radius $\frac{R}{2\cos\vartheta(\gamma)}$, der in der Ebene $z_2 = \gamma$ liegt. (Die Punkte $z_1 = 0$ und $z_1 = R$ haben alle Kreisperipherien gemein.) Wir werden für die $\mathfrak{Z}$-Kreise in ihrer Abhängigkeit von $\vartheta(\gamma)$ und R die Bezeichnung $\mathfrak{Z}[\vartheta(\gamma), R]$ benutzen. Dabei setzen wir voraus, daß für $\vartheta(\gamma)$ alle für $\frac{\vartheta_2(\gamma) + \vartheta_1(\gamma)}{2}$ auf der S. 29 angegebenen Bedingungen

erfüllt sind. Unter einem $\mathfrak{Z}$-Bereich verstehen wir den Bereich

$$\mathfrak{Z} = \Sigma\, \mathfrak{Z}(z_2 = \gamma) = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{h}} \mathfrak{Z}[\vartheta(\gamma), R], \qquad R = \text{const.}$$

Durch die Transformation

$$(7.30) \qquad z_1^{\dagger} = \frac{z_1}{1 - \frac{z_1}{R}}, \qquad z_2^{\dagger} = z_2$$

geht der $\mathfrak{Z}$-Bereich in den Bereich $\mathfrak{S}^{\dagger} = \Sigma\, \mathfrak{S}^{\dagger}(z_2 = \gamma) = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{h}} \mathfrak{T}[\vartheta(\gamma), \pi, \infty]$ über, wobei der Randpunkt $z^1 = R$ in den Punkt $z_1^{\dagger} = \infty$ übergeht. Da nun die Transformation (7.30) in der Umgebung der Stelle $z_1 = 0$, $z_2 = a_2$ regulär ist und $\lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z_1 \to a_1}} \frac{\partial(z_1^{\dagger}, z_2^{\dagger})}{\partial(z_1, z_2)} = 1$ ist, gilt nach (3.5) und (3.12)

$$(7.31) \qquad L_{\mathfrak{Z}}^{II2}[Q(0, a_2), \alpha] = L_{\mathfrak{S}^{\dagger}}^{II2}[Q(0, a_2), \alpha]\,,$$

und nach dem Hilfssatz II stellt (7.31) eine in $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1 + \varepsilon, \vartheta_2 - \varepsilon)$ gleichmäßig stetige Funktion von a_2 und α dar.

Der Bereich $\mathfrak{S} = \Sigma\, \mathfrak{S}(z_2 = \gamma) = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{h}} \mathfrak{S}[\vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma), \varrho] = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{h}} \mathfrak{T}[\vartheta(\gamma), \omega, \varrho]$ geht durch die Transformation

$$(7.32) \qquad \tilde{z}_1 = z_1^{\frac{\pi}{\omega}}, \qquad \tilde{z}_2 = z_2$$

in den Bereich

$$(7.33) \qquad \widetilde{\mathfrak{S}} = \Sigma\, \widetilde{\mathfrak{S}}(z_2 = \gamma) = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{h}} \mathfrak{T}[\widetilde{\vartheta}(\gamma), \pi, \tilde{\varrho}], \qquad \widetilde{\vartheta}(\gamma) = \frac{\pi}{\omega}\, \vartheta(\gamma), \tilde{\varrho} = \varrho^{\frac{\pi}{\omega}}$$

über.

Bezeichnet man von nun an mit $\mathfrak{S}_0^{\dagger}$ bzw. $\mathfrak{Z}_0$ einen bestimmten $\mathfrak{S}^{\dagger}$- bzw. $\mathfrak{Z}$-Bereich, nämlich einen solchen mit den Winkeln

$$(7.34) \qquad \widetilde{\vartheta}_1(\gamma) = \frac{\pi}{\omega}\, \vartheta_1(\gamma), \qquad \widetilde{\vartheta}_2(\gamma) = \frac{\pi}{\omega}\, \vartheta_2(\gamma)\,,$$

und mit $R = \tilde{\varrho} \sin \beta$ [wegen der Bedeutung von β bzw. $\tilde{\varrho}$ vgl. (7.2) und (7.1)], so gilt

$$(7.35) \qquad \mathfrak{Z}_0 < \widetilde{\mathfrak{S}} < \mathfrak{S}_0^{\dagger}$$

und somit

$$(7.36) \qquad \mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_0}(z_1, z_2;\ \bar{z}_1, \bar{z}_2) \geqq \mathsf{K}_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z_1, z_2;\ \bar{z}_1, \bar{z}_2) \geqq \mathsf{K}_{\mathfrak{S}_0^{\dagger}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)\,.$$

Aus (7.31) und (7.36) folgt nunmehr, daß

$$(7.37) \qquad L_{\tilde{\mathfrak{S}}}^{II2}[Q(0, a_2), \alpha]$$

existiert und (7.31) gleich ist. (7.37) ist somit eine in $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1 + \varepsilon, \vartheta_2 - \varepsilon)$ gleichmäßig stetige Funktion von α und a_2. Führt man für die in (7.32) betrachteten Größen die Polarkoordinaten $z_1 = Te^{i\Phi}$ und $\tilde{z}_1 = te^{i\varphi}$ ein, so ist nach (7.14) und (7.32)

$$(7.38) \qquad \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 t^2\, \mathsf{K}_{\tilde{\mathfrak{S}}}(te^{i\varphi}, \tilde{z}_2;\ te^{-i\varphi}, \bar{\tilde{z}}_2) = T^2\, \mathsf{K}_{\mathfrak{S}}[Te^{i\Phi}, z_2;\ Te^{-i\Phi}, \bar{z}_2]\,,$$

$$t = T^{\frac{\pi}{\omega}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{\omega}\Phi, \quad \tilde{z}_2 = z_2\,.$$

Da nun aus $t \to 0$ auch $T \to 0$ folgt und der Transformation (7.32) die Transformation $\varphi = \frac{\pi}{\omega}\Phi$, $z_2 = z_2$ entspricht, folgt aus (7.38) der

Satz V. *Für* (α, a_2) *Werte aus* $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1+\varepsilon, \vartheta_2+\varepsilon)$ *existiert* $L^{II2}_{\mathfrak{E}}[Q(0,a_2),\alpha]$ *und ist eine in* $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1+\varepsilon, \vartheta_2-\varepsilon)$ *gleichmäßig stetige Funktion von* α *und* a_2.

Aus dem Satz V und Hilfssatz III folgt nun eine wichtige Verallgemeinerung dieses letzteren, nämlich das

Korollar I. Die Folge der Bereiche

$$\mathfrak{E}^{(m)} = \Sigma\, \mathfrak{S}^{(m)}(z_2=\gamma) = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}} \mathfrak{S}[\vartheta_1^{(m)}(\gamma),\ \vartheta_2^{(m)}(\gamma),\ \varrho^{(m)}] \quad (0<\varrho_0\leqq\varrho^{(m)}\leqq\varrho_1<\infty)$$

konvergiere gegen den Bereich $\mathfrak{E} = \Sigma\, \mathfrak{S}(z_2=\gamma) = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}} \mathfrak{S}[\vartheta_1(\gamma),\ \vartheta_2(\gamma),\ \varrho]$ in dem Sinne, daß für jedes γ $\vartheta^{(m)}(\gamma)\to\vartheta(\gamma)$ und $\omega^{(m)}\to\omega$ gilt und zwar gleichmäßig in $\mathfrak{H}$. Es gilt dann $\lim\limits_{m\to\infty} L^{II2}_{\mathfrak{E}^{(m)}}[Q(0,a_2),\alpha] = L^{II2}_{\mathfrak{E}}[Q(0,a_2),\alpha]$.

Bemerkung. $\mathfrak{H}_m$, $m=1,2,3,\ldots$, *bedeute eine Folge von ineinander eingeschachtelten Bereichen, die gegen einen Kernbereich* $\mathfrak{H}$ *konvergieren. Es sei* $\mathfrak{E}^{\dagger}$ *der durch* (7. 17 a) *gegebene Bereich und* $\mathfrak{E}^{\dagger}_m = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}_m} \mathfrak{S}[\vartheta_1(\gamma),\vartheta_2(\gamma),\infty]$. *Es gilt dann:* $\lim\limits_{m\to\infty} L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger}_m}[Q(0,a_2),\alpha] = L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger}}[Q(0,a_2),\alpha]$ *und zwar in* $\mathfrak{h}_m(\vartheta_1+\varepsilon,\vartheta_2-\varepsilon)$ *gleichmäßig in* a_2 *und* α. Bezeichnen wir nämlich mit $f_m(z_2)$ $[f_m(a_2)=a_2,\ f_m'(a_2)>0]$ diejenige Funktion, die $\mathfrak{H}_m$ auf $\mathfrak{H}$ abbildet und mit $r_m(z_2)$ die zugehörige Umkehrfunktion, so geht durch: $\tilde z_1 = z_1$, $\tilde z_2 = f_m(z_2)$ der Bereich $\mathfrak{E}^{\dagger}_m$ in $\tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger}_m = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}} \mathfrak{S}[\vartheta_1^{(m)}(\gamma),\ \vartheta^{(m)}(\gamma),\infty]$ über, wo $\vartheta_k^{(m)}(\gamma) = \vartheta_k[r_m(\gamma)]$ bedeutet. Nach (1. 15) gilt $L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{E}}^{\dagger}_m}(Q,\alpha) = |r_m'(a_2)|^2 L^{II2}_{\mathfrak{E}^{\dagger}_m}(Q,\alpha)$. Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie gilt $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(z_2) = z_2$ (und zwar gleichmäßig in $\mathfrak{H}$); daraus folgt in Verbindung mit **3.** aus dem Hilfssatz III die angegebene Limesbeziehung.

Eine analoge Limesrelation läßt sich nach (7. 31), (7. 37) u. f. für die $\mathfrak{E}$-Bereiche gewinnen.

§ 8.

z_1, z_2 seien für den Punkt Q von $\mathfrak{B}$ normale Koordinaten, und wir nehmen wieder an, daß die Ebene $z_1=0$ mit der Berandung von $\mathfrak{B}$ ein Flächenstück $\mathfrak{H}$ gemeinsam hat mit dem inneren Punkt $z_2=0$. Wir machen in diesem Paragraphen die Annahmen:

1. $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(z_1=0)$ ist ein Sternbereich, bei dem, wenn die Gleichung der Randkurve

$$R = h(\theta), \qquad z_2 = Re^{i\theta}, \tag{8. 1}$$

lautet, für $h(\theta)$ die Lipschitzbedingung

$$|h(\theta)-h(\theta')| \leqq A\,|\theta-\theta'| \tag{8. 2}$$

erfüllt ist.

2. Wir setzen voraus (was sich durch einfache Transformation leicht erreichen läßt), daß für alle z_1-Koordinaten $|z_1|\leqq 1$ gilt, und machen über die Schnitte $\mathfrak{B}(z_1=\gamma)$ die Annahme, daß

$$\mathfrak{B}(z_1=\gamma) < \frac{1}{1-\gamma^{\frac{1}{\nu}}}\,\mathfrak{H}, \qquad 0<\nu<\infty, \tag{8. 3}$$

ist.

3. Für jeden Schnitt $\mathfrak{B}(z_2=\gamma)$, der nicht leer ist, soll ferner eine Gerade $\mathfrak{g}(\gamma)$, die durch den Punkt $z_1=0$ geht, existieren, für deren Winkel $\Psi(\gamma)$ mit der positiven x_1-Achse folgendes gilt:

$$|\Psi(\gamma)-\Psi(\gamma')| \leqq C\,|\gamma-\gamma'|^{\mu}, \qquad \mu>0 \tag{8. 4}$$

$$\Psi(\gamma) + C\,|\gamma|^{\mu}\,|z_1|^{\frac{\mu}{\nu}} < \arg z_1 < \pi + \Psi(\gamma) - C\,|\gamma|^{\mu}\,|z_1|^{\frac{\mu}{\nu}}, \tag{8. 5}$$

wenn z_1 einen beliebigen Punkt aus dem Schnitt $\mathfrak{B}(z_2=\gamma)$ bedeutet.

Aus (8. 5) folgt insbesondere, daß der Schnitt $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ nebst seiner Berandung mit Ausnahme des Punktes $z_1 = 0$ ganz auf einer Seite der Geraden $\mathfrak{g}(\gamma)$ liegt. Für diejenigen Werte von γ, die zu $\mathfrak{H}$ gehören, ist nach 4 die Gerade $\mathfrak{g}(\gamma)$ die Tangente zur Berandung von $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ im Punkte $z_1 = 0$. (Vgl. dazu die Abb. 9.)

4.[1]) Über die Schnitte $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ machen wir ferner die Annahme, daß zu jedem abgeschlossenen ganz im Innern von $\mathfrak{H}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{H}'$ es eine positive (von γ unabhängige) Zahl $\varkappa$ gibt von der Art, daß sobald γ zu $\mathfrak{H}'$ gehört in jedem Schnitt $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ ein Kreis vom Radius $\varkappa$ liegt, der die Berandung von $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ in $z_1 = 0$ berührt.

5. Es gilt ferner für $\Psi(\gamma)$ die Ungleichung

$$-\pi + \beta \leqq \Psi(\gamma) \leqq -\beta \qquad (\beta > 0). \tag{8. 6}$$

(Es gibt also einen festen (von γ unabhängigen $\mathfrak{S}$-Sektor) der mit jedem Schnitt $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ nur den Punkt $z_1 = 0$ gemeinsam hat.)

Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir den

Satz VI. *Für jeden Bereich $\mathfrak{B}$ der angegebenen Art existiert bei der Annäherung $\mathsf{A}^{II}(\alpha)$ der Grenzwert*

$$L_{\mathfrak{B}}^{II2}(Q, \alpha) = \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ \arg z_1 \to \alpha \\ z_2 \to 0}} |z_1|^2 \, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2). \tag{8. 7}$$

Beweis. Auf den Bereich $\mathfrak{B}$ wenden wir die Transformation

$$\tilde{z}_1 = z_1, \qquad \tilde{z}_2 = (1 - z_1^{\frac{1}{r}})\, z_2 \tag{8. 8}$$

an und beweisen für den transformierten Körper $\tilde{\mathfrak{B}}$:

1. Es ist

$$\tilde{\mathfrak{B}}(z_1 = 0) > \tilde{\mathfrak{B}}(z_1 = \gamma). \tag{8. 9}$$

2. Ist γ[2]) ein Punkt aus $\mathfrak{H}$, so wird die Gerade $\mathfrak{g}(\gamma)$ auch die Berandung des Schnittes $\tilde{\mathfrak{B}}(z_2 = \gamma)$ in $z_1 = 0$ berühren, und der Schnitt $\tilde{\mathfrak{B}}(z_2 = \gamma)$ liegt auf einer Seite dieser Tangente.

1. folgt unmittelbar aus der Voraussetzung **2**

2. Ist

$$2x_1 = \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2) \tag{2. 7}$$

die Gleichung der Berandungsfläche, so folgt aus den über ψ gemachten Voraussetzungen **4** und **3**, daß

$$\frac{\psi(y_1, z_2, \bar{z}_2)}{2y_1} = \chi(y_1, z_2, \bar{z}_2) \tag{8. 9 a}$$

eine stetige Funktion der Veränderlichen $y_1, z_2, \bar{z}_2$ ist. Nun ist für jedes γ aus $\mathfrak{H}$

$$\operatorname{tg}\Psi(\gamma) = \lim_{y_1 \to 0} \frac{2y_1}{\psi(y_1, \gamma, \bar{\gamma})} = \frac{1}{\chi(0, \gamma, \bar{\gamma})},$$

und für den tg des Winkels der Tangente an die Randkurve von $\tilde{\mathfrak{B}}(z_2 = \gamma)$ [die durch $2\tilde{x}_1 = \psi\left(\tilde{y}_1, \frac{\tilde{z}_2}{1 - \tilde{z}_1^{\frac{1}{r}}}, \frac{\bar{\tilde{z}}_2}{1 - \bar{\tilde{z}}_1^{\frac{1}{r}}}\right)$ gegeben ist] erhält man wieder unter Benutzung von (8. 9 a):

---

[1]) An Stelle von **4** kann eine schwächere Voraussetzung gemacht werden, nämlich, daß zu jedem $\mathfrak{H}'$ eine Folge von $\mathfrak{C}_m\left[\Psi(\gamma) + \frac{\pi}{2}, \omega_m, \varrho_m\right]$, $m = 1, 2, \ldots$, gibt mit $\varrho_m > 0$, $\lim_{m \to \infty} \omega_m = \pi$, so daß für jedes γ aus $\mathfrak{H}'$ $\mathfrak{C}_m\left[\Psi(\gamma) + \frac{\pi}{2}, \omega_m, \varrho_m\right] < \mathfrak{B}(z_2 = \gamma)$ gilt. Vgl. dazu S. 36—37.

[2]) Mit γ bezeichnen wir im folgenden sowohl Punkte in der z_1-, wie in der z_2-Ebene.

$$(8.\,10)\qquad \lim_{\tilde{y}_1\to 0}\frac{2\tilde{y}_1}{2\tilde{x}_1}=\lim_{\substack{y_1\to 0\\ x_1\to 0}}\frac{1}{\chi\left(y_1,\ \dfrac{\gamma}{1-z_1^{\frac{1}{\nu}}},\ \dfrac{\bar{\gamma}}{1-\bar{z}_1^{\frac{1}{\nu}}}\right)}=\frac{1}{\chi(0,\gamma,\bar{\gamma})},$$

so daß die Gerade $\mathfrak{g}(\gamma)$ Tangente im Punkte $z_1=0$ an die Berandung des Schnittes $\mathfrak{B}(z_2=\gamma)$ des transformierten Bereiches ist, womit der erste Teil von 2. bewiesen ist.

Es sei $z_1=r_1^0\,e^{i\varphi_0}$, $z_2=\gamma$ ein Punkt von $\mathfrak{B}$ und $z_1=r_1^0\,e^{i\varphi_0}$, $z_2=\tilde{\gamma}$ der entsprechende Punkt von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Es ist nun zu zeigen, daß $\tilde{\mathfrak{B}}(z_2=\gamma)$ auf einer Seite von $\mathfrak{g}(\gamma)$ liegt. In Verbindung mit $\gamma-\tilde{\gamma}=\gamma z_1^{\frac{1}{\nu}}$ folgt aus (8. 4)

$$(8.\,11)\qquad |\Psi(\gamma)-\Psi(\tilde{\gamma})|\leqq C\,|\gamma|^{\mu}\,|z_1|^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Wir werden nun zeigen, daß für den Winkel χ zwischen $\mathfrak{g}(\tilde{\gamma})$ und dem Strahl, der den Punkt $z_1=0$ mit dem Punkt z_1 verbindet,

$$(8.\,12)\qquad 0\leqq\chi\leqq\pi$$

gilt, woraus der zweite Teil der Behauptung 2. folgt. Es ist nämlich

$$\chi=\varphi_0-\Psi(\tilde{\gamma})=\varphi_0-\Psi(\gamma)+\Psi(\gamma)-\Psi(\tilde{\gamma}),\qquad \varphi_0=\operatorname{arc} z_1,$$

und somit

$$|\varphi_0-\Psi(\gamma)|-|\Psi(\gamma)-\Psi(\tilde{\gamma})|<\chi<|\varphi_0-\Psi(\gamma)|+\pi+|\Psi(\gamma)-\Psi(\tilde{\gamma})|,$$

und die Ungleichungen (8. 11) und (8. 5) ergeben (8. 12).

Andererseits besteht nach (1. 15) die Beziehung

$$(8.\,13)\qquad |\tilde{z}_1|^2\,\mathsf{K}_{\tilde{\mathfrak{B}}}(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2;\bar{\tilde{z}}_1,\bar{\tilde{z}}_2)=|z_1|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1,z_2;\bar{z}_1,\bar{z})\colon|1-z_1^{\frac{1}{\nu}}|^2,$$

und somit genügt es die Behauptung des Satzes VI für den Körper $\tilde{\mathfrak{B}}$ zu beweisen. Es sei nun $\mathfrak{H}_m$ $(m=1,2,3,4,\ldots\ldots)$ eine Folge von abgeschlossenen in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Bereichen, so daß $\mathfrak{H}_m$ ganz im Innern von $\mathfrak{H}_{m+1}$ liegt, und die $\mathfrak{H}_m$ den Bereich $\mathfrak{H}$ ganz ausschöpfen. Mit $\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}$ bezeichnen wir den Bereich [1])

$$(8.\,14)\qquad \tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}=\sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}_m}\tilde{\mathfrak{B}}(z_2=\gamma).$$

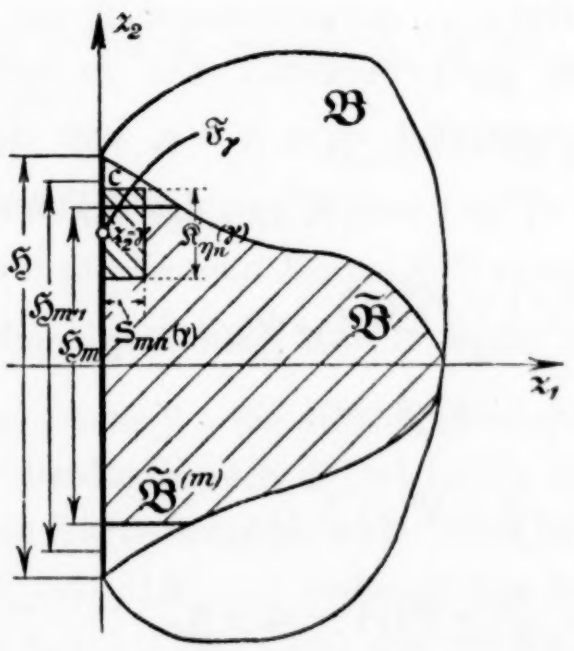

Abb. 7. (Schematische Darstellung.)

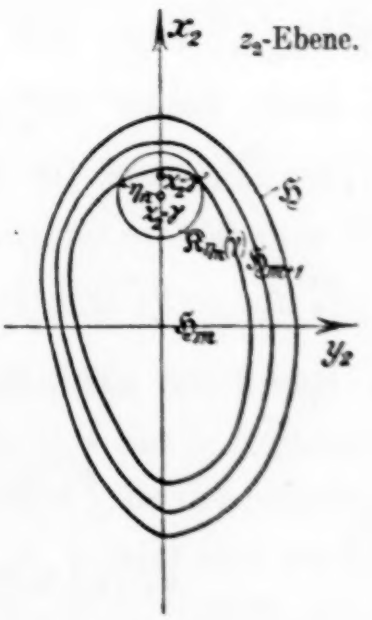

Abb. 8.

Für den Körper $\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}$ konstruieren wir:

[1]) In der Abb. 7 schraffiert.

I. Einen Bereich

$$\mathfrak{S}^{(m)} = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}_m} \mathfrak{S}^{(m)}(z_2 = \gamma) > \tilde{\mathfrak{B}}^{(m)} \tag{8.15}$$

von der im § 7, S. 29 betrachteten Art, wobei der Sektor $\mathfrak{S}^{(m)}(z_2 = \gamma) = \mathfrak{S}[\vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma), \varrho]$ ein Halbkreis ist, bei dem der Durchmesser auf der Geraden $\mathfrak{g}(\gamma)$ liegt und der Radius ϱ so groß genommen wird, daß

$$\mathfrak{S}^{(m)}(z_2 = \gamma) > \tilde{\mathfrak{B}}(z_2 = \gamma), \qquad \gamma < \mathfrak{H}_m, \tag{8.16}$$

ist. Da $\tilde{\mathfrak{B}}$ beschränkt ist und $\tilde{\mathfrak{B}}(z_2 = \gamma)$ nach 2. ganz auf einer Seite der Geraden $\mathfrak{g}(\gamma)$ liegt, ist diese Konstruktion offenbar möglich. Aus 5 folgt, daß die Forderungen 4 und 5 des § 7 erfüllt sind.

II. Eine Folge von Bereichen

$$\mathfrak{S}^{(mn)} = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}_m} \mathfrak{S}^{(mn)}(z_2 = \gamma), \tag{8.17}$$

so daß für jedes m

$$\mathfrak{S}^{(mn)} < \tilde{\mathfrak{B}}^{(m)} \tag{8.18}$$

ist, und für die Winkel ω_{mn} von $\mathfrak{S}^{(mn)}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{mn} = \pi (= \omega_m), \tag{8.19}$$

und zwar bei festen m gleichmäßig in γ $[\gamma < \mathfrak{H}_m]$.

Es sei ε_n positiv und $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Da die Funktion $\Psi(\gamma)$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein η_n, so daß in jedem Punkte γ von $\mathfrak{H}_m$ ein Kreis $\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)$ mit dem Radius η_n und Mittelpunkt in γ gelegt werden kann, so daß innerhalb von $\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)$ gilt:

$$\Psi(\gamma) - \frac{\varepsilon_n}{2} < \Psi(z_2) < \Psi(\gamma) + \frac{\varepsilon_n}{2}, \qquad z_2 < \mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma). \tag{8.20}$$

Wir können außerdem η_n so klein voraussetzen, daß der Kreis $\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)$ für jedes γ aus $\mathfrak{H}_m$ ganz in $\mathfrak{H}_{m+1}$ liegt. Nach Voraussetzung gehört zu jedem γ' aus $\mathfrak{H}_{m+1}$, also a fortiori aus $\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)$, ein Kreis mit dem Radius $\varkappa_{m+1}$, der ganz innerhalb von $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma')$ $[\gamma' < \mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma) < \mathfrak{H}_{m+1}]$ liegt und die Gerade $\mathfrak{g}(\gamma')$ berührt. Um so mehr enthält $\mathfrak{B}(z_2 = \gamma')$ einen Sektor mit dem Öffnungswinkel $\omega_n = \pi - \varepsilon_n$ und dem Radius $\tau_{mn} = 2\varkappa_{m+1} \cos\frac{\omega_n}{2}$, wobei für die Winkel $\vartheta_1^{(n)}(\gamma')$ und $\vartheta_2^{(n)}(\gamma')$ des Sektors

$$\vartheta_2^{(n)}(\gamma') - \vartheta_1^{(n)}(\gamma') = \omega_n, \qquad \frac{\vartheta_1^{(n)}(\gamma') + \vartheta_2^{(n)}(\gamma')}{2} = \Psi(\gamma') + \frac{\pi}{2}, \qquad \gamma' < \mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma), \tag{8.21}$$

gelten soll. Man erhält somit für $z_2 < \mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)$ nach (8.20):

$$\begin{aligned} \vartheta_1^{(n)}(z_2) &= \Psi(z_2) + \frac{\varepsilon_n}{2} < \Psi(\gamma) + \varepsilon_n, \\ \vartheta_2^{(n)}(z_2) &= \Psi(z_2) + \pi - \frac{\varepsilon_n}{2} > \Psi(\gamma) - \varepsilon_n + \pi, \end{aligned} \tag{8.22}$$

also

$$\vartheta_1^{(n)}(z_2) < \vartheta_1^{*(n)}(\gamma) < \vartheta_2^{*(n)}(\gamma) < \vartheta_2^{(n)}(z_2), \qquad z_2 < \mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma), \tag{8.23}$$

wenn

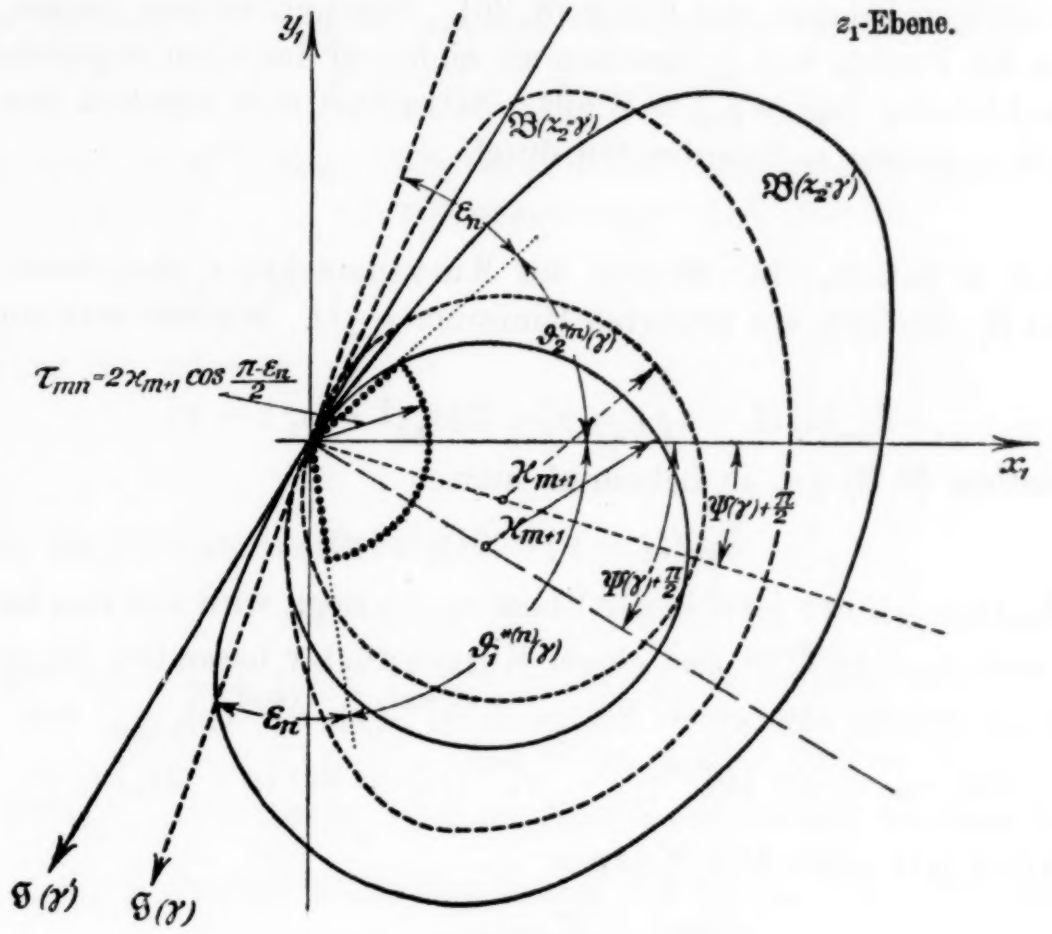

Abb. 9.

$$\begin{aligned}\vartheta_1^{*(n)}(\gamma) &= \vartheta_1^{(n)}(\gamma)+\frac{\varepsilon_n}{2}=\Psi(\gamma)+\varepsilon_n,\\ \vartheta_2^{*(n)}(\gamma) &= \vartheta_2^{(n)}(\gamma)-\frac{\varepsilon_n}{2}=\Psi(\gamma)+\pi-\varepsilon_n,\end{aligned}\qquad [\vartheta_2^{*(n)}(\gamma)-\vartheta_1^{*(n)}(\gamma)=\pi-2\varepsilon_n], \tag{8. 24}$$

gesetzt wurde.

Bezeichnet man also mit $\mathfrak{S}_{mn}(\gamma)$ den Sektor mit dem Winkel $\vartheta_1^{*(n)}(\gamma)$ und $\vartheta_2^{*(n)}(\gamma)$ und mit dem Radius

$$\tau_{mn}=2\varkappa_{m+1}\cos\frac{\pi-\varepsilon_n}{2},$$

so ist er für γ' aus $\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)$ $[\gamma<\mathfrak{H}_m]$ in $\mathfrak{B}(z_2=\gamma')$ enthalten[1]). Somit liegt der Produktbereich

$$\mathfrak{S}_{mn}(\gamma)=\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)\times\mathfrak{S}_{mn}(\gamma) \tag{8. 25}$$

ganz in $\mathfrak{B}^{(m+1)}$. (Vgl. Abb. 7.)

Kehrt man nun zum Körper $\mathfrak{B}^{(m)}$ zurück und betrachtet die Schnitte $\mathfrak{B}^{(m)}(z_2=\gamma)$, so entsprechen ihnen beim Körper $\mathfrak{B}$ die Schnitte $\mathfrak{B}[z_2(1-z_1^{\frac{1}{\nu}})=\gamma]$ von $\mathfrak{B}$ mit der analytischen Fläche $\mathfrak{F}_\gamma$, die durch $z_2(1-z_1^{\frac{1}{\nu}})=\gamma$ gegeben ist. Der Schnitt der Fläche $\mathfrak{F}_\gamma$ mit dem Produktbereich $\mathfrak{S}_{mn}(\gamma)$ ist ein Flächenstück, das auf $\mathfrak{F}_\gamma$ liegt und von einer geschlossenen Kurve berandet wird. Diese Berandungskurve $\mathfrak{f}_\gamma$ ist der Schnitt der Fläche $\mathfrak{F}_\gamma$ mit $\boldsymbol{R}[\mathfrak{S}_{mn}(\gamma)]$. ($\boldsymbol{R}[\ldots]$ bedeutet den Rand von ...). $\mathfrak{f}_\gamma$ setzt sich aus dem Schnitt von $\mathfrak{F}_\gamma$ mit $\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)\times\boldsymbol{R}[\mathfrak{S}_{mn}(\gamma)]$ und mit $\{\mathfrak{S}_{mn}(\gamma)+\boldsymbol{R}[\mathfrak{S}_{mn}(\gamma)]\}\times\boldsymbol{R}[\mathfrak{K}_{\eta_n}(\gamma)$ zusammen. Die z_1-Koordinaten des ersten Teiles von $\mathfrak{f}_\gamma$ liegen entweder auf den beiden Strahlen $re^{i\vartheta_1^{*(n)}(\gamma)}$, $re^{i\vartheta_2^{*(n)}(\gamma)}$ $[0\leqq r<\infty]$ oder auf einem Kreis mit dem Radius τ_{mn}. Für die z_2-Ko-

[1]) Wenn an Stelle von 4. die in der Fußnote [1]) S. 34 angegebene Voraussetzung tritt, hat man das in der letzten Formel auftretende $\varkappa_{m+1}$ durch ϱ_{m+1} zu ersetzen.

ordinaten der übrigen Punkte von $\mathfrak{f}_\gamma$ gilt (8. 26). Wir werden nun zeigen, daß für die z_1-Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{f}_\gamma$, insofern sie nicht auf den oben angegebenen Strahlen liegen, die Ungleichung $|z_1| \geqq \varrho_{mn} > 0$ gilt. Betrachtet man nämlich den Teil der Berandung von $\mathfrak{S}_{mn}$, dessen z_2-Koordinaten durch

$$|z_2 - \gamma| = \eta_n \tag{8. 26}$$

dargestellt sind, so hat $|z_1|$ für Punkte des Kurvenstückes c, das durch den Schnitt von (8. 26) mit $\mathfrak{F}_\gamma$ entsteht, ein positives Minimum ϱ_{mn}[1]). Wendet man nun auf

$$\mathfrak{S}_{mn}[z_2 (1 - z_1^{\frac{1}{\nu}}) = \gamma] < \mathfrak{B}[z_2 (1 - z_1^{\frac{1}{\nu}}) = \gamma]$$

die Transformation (8. 8) an, so bekommt man

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{mn}(z_2 = \gamma) < \tilde{\mathfrak{B}}(z_2 = \gamma).$$

Der Schnitt $\tilde{\mathfrak{S}}_{mn}(z_2 = \gamma)$, der jetzt in der Ebene $z_2 = \gamma$ liegt, wird von den beiden Strahlen $z_1 = re^{i\vartheta_1^{*(n)}(\gamma)}$ und $z_1 = re^{i\vartheta_2^{*(n)}(\gamma)}$ und einem Kurvenstück c berandet, für das $|z_1| \geqq \varrho_{mn}$ gilt; $\tilde{\mathfrak{S}}_{mn}(z_2 = \gamma)$ enthält also einen Sektor $S[\vartheta_1^{*(n)}(\gamma), \vartheta_2^{*(n)}(\gamma), \varrho_{mn}]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{mn} = \lim_{n\to\infty} [\vartheta_2^{*(n)}(\gamma) - \vartheta_1^{*(n)}(\gamma)] = \lim_{n\to\infty} (\pi - 2\varepsilon_n) = \pi. \tag{8. 27}$$

Definieren wir also den Körper

$$\mathfrak{S}^{(mn)} = \sum_{\gamma}^{\mathfrak{H}_m} \mathfrak{S}^{(mn)}(z_2 = \gamma) \tag{8. 28}$$

durch

$$\mathfrak{S}^{(mn)}(z_2 = \gamma) = S[\vartheta_1^{*(n)}(\gamma), \vartheta_2^{*(n)}(\gamma), \varrho_{mn}], \tag{8. 29}$$

so gilt

$$\mathfrak{S}^{(mn)} < \tilde{\mathfrak{B}}^{(m)} < \mathfrak{S}^{(m)}, \tag{8. 30}$$

und es ist außerdem wegen (8. 21), (8. 22)), (8. 24)

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_1^{*(n)}(\gamma) = \Psi(\gamma), \quad \lim_{n\to\infty} \vartheta_2^{*(n)}(\gamma) = \Psi(\gamma) + \pi. \tag{8. 31}$$

Nach (8. 30) ist somit

$$|z_1|^2 K_{\mathfrak{S}^{(m)}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq |z_1|^2 K_{\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq |z_1|^2 K_{\mathfrak{S}^{(mn)}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \tag{8. 32}$$

und somit

$$L^{II2}_{\mathfrak{S}^{(m)}}(Q, \alpha) \leqq \underline{L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}}}(Q, \alpha) \leqq \overline{L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}}}(Q, \alpha) \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} L^{II2}_{\mathfrak{S}^{(mn)}}(Q, \alpha), \tag{8. 33}$$

und da nach dem Korollar zum Satz V

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} L^{II2}_{\mathfrak{S}^{(mn)}}(Q, \alpha) = L^{II2}_{\mathfrak{S}^{(m)}}(Q, \alpha) \tag{8. 34}$$

ist, *so existiert* $L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}}(Q, \alpha)$, *und es ist*

$$L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}}(Q, \alpha) = L^{II2}_{\mathfrak{S}^{(m)}}(Q, \alpha). \tag{8. 35}$$

---

[1]) Setzt man nämlich $z_2 = \gamma + \eta_n e^{i\varphi}$, so ergibt sich für diese Schnittpunkte

$$|z_1| = \left|1 - \frac{\gamma}{\eta_n e^{i\varphi} + \gamma}\right|^\nu = \left|\frac{\eta_n^\nu e^{i\nu\varphi}}{(\eta_n e^{i\varphi} + \gamma)^\nu}\right|$$

wegen der Beschränktheit von γ die Existenz einer positiven unteren Schranke für $|z_1|$. Bezeichnet man also:

$$\varrho_{mn} = \min\left(2\varkappa_{m+1} \cos\frac{\pi - \varepsilon_n}{2}, \left|\frac{\eta_n^\nu e^{i\nu\varphi}}{(\eta_n e^{i\varphi} + \gamma)^\nu}\right|\right),$$

so gilt für die z_1-Koordinaten der Kurve c die Ungleichung $|z_1| \geqq \varrho_{mn}$.

Auf den Bereich $\mathfrak{B}^{(m)}$ wenden wir nun die Transformation

$$z_1^* = T_m z_1^{1+\tau_m}, \quad z_2^* = (1 + p_m) z_2 \tag{8.36}$$

an. $\mathfrak{B}^{(m)}$ gehe dann in $\mathfrak{G}^{(m)}$ über. Wir wollen nun zeigen, daß man die Konstanten T_m, τ_m, $p_m (m = 1, 2, 3, 4, \ldots.)$, so bestimmen kann, daß erstens

$$\lim_{m\to\infty} p_m = 0, \tag{8.37}$$

$$\lim_{m\to\infty} \tau_m = 0 \tag{8.38}$$

ist und zweitens für jedes m

$$\mathfrak{G}^{(m)} > \tilde{\mathfrak{B}} \; [> \tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}] \tag{8.39}$$

gilt.

1. Durch die Transformation

$$z_1 = \tilde{\tilde{z}}_1, \quad \tilde{\tilde{z}}_2 = (1 + p_m) z_2 \tag{8.40}$$

geht $\mathfrak{B}^{(m)}$ in $\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}^{(m)}$ über, und (nach 1) können wir p_m so wählen, daß

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}^{(m)}(z_1 = 0) = (1 + p_m)\, \mathfrak{B}^{(m)}(z_1 = 0) > \tilde{\mathfrak{B}}(z_1 = 0) \tag{8.41}$$

gilt. Da $\lim_{m\to\infty} \mathfrak{B}^{(m)}(z_1 = 0) = \lim_{m\to\infty} \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}$ ist, kann noch erreicht werden, daß (8. 37) besteht. Es sei $\varepsilon_m (\varepsilon_m > 0)$ eine Folge von Zahlen mit $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$. Wir wählen nun die Folge der τ_m so, daß die τ_m die Ungleichungen

$$\max\left[\left|\frac{\varepsilon_m + C\,|p_m \gamma|^\mu}{\Psi(\gamma) + \varepsilon_m}\right|, \left|\frac{-\varepsilon_m + C\,|p_m \gamma|^\mu}{\Psi(\gamma) + \pi - \varepsilon_m}\right|\right] < \tau_m < \min\left[\frac{-\pi + \Psi(\gamma)}{\Psi(\gamma)}, \frac{-\Psi(\gamma)}{\pi + \Psi(\gamma)}\right] \tag{8.42}$$

$$(\gamma < \mathfrak{H})$$

befriedigen, wobei die Konstanten C und μ die in (8. 5) angegebene Bedeutung haben. Da $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$, $\lim_{m\to\infty} p_m = 0$, γ beschränkt ist und ferner nach (8. 6) $\Psi(\gamma) < -\beta$, $\Psi(\gamma) + \pi > \beta$ $(\beta > 0)$ ist, kann die Wahl der τ_m so geschehen, daß gleichzeitig (8. 38) erfüllt ist.

2. Wie früher bewiesen, existiert zu jedem Punkt γ aus $\mathfrak{H}_m$ und zu jedem $\varepsilon_m > 0$ ein ϱ_{mm}[1]), so daß im Innern von $\tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}(z_2 = \gamma)$ der Sektor $\mathfrak{S}_\gamma = \mathfrak{S}[\Psi(\gamma) + \varepsilon_m, \Psi(\gamma) + \pi - \varepsilon_m, \varrho_{mm}]$ liegt (siehe dazu S. 38). $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist ein beschränkter Bereich; es existiert somit ein P, so daß für alle z_1-Koordinaten aus $\tilde{\mathfrak{B}}$ $|z_1| \leqq \mathsf{P}$ gilt. Wir setzen nun $T_m = \dfrac{\mathsf{P}}{\varrho_{mm}}$. Durch die Transformation (8. 36) geht dann der Sektor $\mathfrak{S}_\gamma$ in den Sektor $\tilde{\mathfrak{S}}_\gamma = \mathfrak{S}[(1 + \tau_m)(\Psi(\gamma) + \varepsilon_m), (1 + \tau_m)(\Psi(\gamma) + \pi - \varepsilon_m), \mathsf{P}]$ über, der jetzt in der Ebene $z_2 = (1 + p_m)\gamma$ liegt. Da $\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}^{(m)}[z_2 = (1 + p_m)\gamma] = \tilde{\mathfrak{B}}^{(m)}(z_2 = \gamma)$ und somit $\mathfrak{G}^{(m)}[z_2 = (1 + p_m)\gamma] > \mathfrak{S}_\gamma$ ist, genügt es, um (8. 39) zu beweisen, zu zeigen, daß

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\gamma > \tilde{\mathfrak{B}}[z_2 = (1 + p_m)\gamma] \tag{8.43}$$

gilt. (8. 4) ergibt

$$\Psi(\gamma) - C\,|p_m \gamma|^\mu \leqq \Psi[(1 + p_m)\gamma] \leqq \Psi(\gamma) + C\,|p_m \gamma|^\mu. \tag{8.44}$$

Aus dieser Ungleichung in Verbindung mit (8. 42) folgt weiter

---

[1]) Die ϱ_{mm} gewinnt man folgendermaßen: nachdem die Folgen $\mathfrak{H}_m$ und ε_m festgelegt sind, betrachtet man einen bestimmten $\mathfrak{H}_m$-Bereich etwa $\mathfrak{H}_k$; setzt man nun für das auf den S. 36—38 auftretende ε_n den Wert ε_k ein, so erhält man wie in der Fußnote [1]) S. 38 das zugehörige ε_{kk}.

$$(8.45)\quad (1+\tau_m)[\Psi(\gamma)+\varepsilon_m] \leqq \Psi(\gamma) - C\,|p_m\gamma|^{\mu} \leqq \Psi[(1+p_m)\,\gamma],$$

$$(8.46)\quad (1+\tau_m)[\Psi(\gamma)+\pi-\varepsilon_m] \geqq \Psi(\gamma) + C\,|p_m\gamma|^{\mu} + \pi \geqq \Psi[(1+p_m)\,\gamma].$$

Da nun für alle z_1 aus $\mathfrak{B}$ $|z_1| \leqq \mathsf{P}$ gilt und in 2. (S. 34) bewiesen wurde, daß $\mathfrak{B}$ $(z_2=\gamma)$ $[\gamma < \mathfrak{H}]$ auf einer Seite der Geraden $\mathfrak{g}(\gamma)$ liegt (m. a. W. daß für jeden Punkt z_1 aus $\mathfrak{B}(z_2=\gamma)$

$$\Psi(\gamma) \leqq \operatorname{arc} z_1 \leqq \Psi(\gamma)+\pi$$

gilt), besteht die Relation (8. 43), woraus nun (8. 39) folgt.

Da für $m_1 < m_2$ $\mathfrak{B}^{(m_1)} < \mathfrak{B}^{(m_2)}$ gilt, also für jedes feste z_1, z_2

$$|z_1|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}^{(m_1)}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \geqq |z_1|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}^{(m_2)}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

ist, bilden die $L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha)$ $[m=1,2,3,4,\ldots]$ eine Folge von Zahlen, die bei wachsendem m nicht zunehmen. Nach Satz IV (S. 24) ist $L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q,\alpha)>0$, und da $\mathfrak{B}^{(m)} < \mathfrak{B}$ und somit $L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha) \geqq L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q,\alpha) > 0$ ist, folgt, daß $\lim\limits_{m\to\infty} L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha)$ (für ein festes α) existiert und einen positiven Wert hat. Nach (1. 15) ist

$$(8.46)\quad |z_1^*|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{G}^{(m)}}(z_1^*, z_2^*; \bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*) = \frac{|T_m\,\tilde{z}^{1+\tau_m}|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2;\bar{\tilde{z}}_1,\bar{\tilde{z}}_2)}{\left|\frac{\partial(z_1^*, z_2^*)}{\partial(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2)}\right|^2} = \frac{|\tilde{z}_1|^2\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2;\bar{\tilde{z}}_1,\bar{\tilde{z}}_2)}{[(1+\tau_m)\,(1+p_m)]^2},$$

woraus

$$(8.47)\quad L^{II2}_{\mathfrak{G}^{(m)}}[Q,\alpha] = \frac{1}{[(1+\tau_m)\,(1+p_m)]^2}\,L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}\left[Q, \frac{\alpha}{(1+\tau_m)}\right] \leqq L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q,\alpha) \leqq L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha)$$

folgt. Wie in Satz III (S. 23) gezeigt wurde, ist $L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha)$ eine stetige Funktion von α und zwar gleichmäßig in m [1]). Aus (8. 37), (8. 38), (8. 47) und der Existenz von $\lim\limits_{m\to\infty} L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha)$ folgt somit die Existenz von $L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q,\alpha)$. Nach (8. 7) ist $\tilde{z}_1 = z_1$ und somit $\tilde{\alpha} = \operatorname{arctg}\dfrac{\tilde{y}_1}{\tilde{x}_1} = \operatorname{arctg}\dfrac{y_1}{x_1} = \alpha$; ferner gilt $\lim\limits_{\substack{z_1\to 0\\ z_2\to 0}} \dfrac{\partial(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2)}{\partial(z_1,z_2)} = \lim\limits_{z_1\to 0}(1 - z_1^{\frac{1}{r}}) = 1$. Somit wird

$$(8.48)\qquad L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q,\alpha) = L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{B}}}(Q,\alpha),$$

und aus der Existenz von $L^{II2}_{\tilde{\mathfrak{B}}}(Q,\alpha)$ können wir auf die Existenz von $L^{II2}_{\mathfrak{B}}(Q,\alpha)$ schließen, womit der Satz VI bewiesen ist.

§ 9.

In dem vorliegenden Paragraphen werden wir Randpunkte Q eines Körpers $\mathfrak{B}$ betrachten, bei denen die Randfläche im Punkte Q im allgemeinen keine Tangentialhyperebene besitzt. (Demgemäß wird dem Koordinatensystem hier nur die Forderung, daß der Punkt Q der Koordinatenanfangspunkt ist, auferlegt.) Wie im folgenden gezeigt wird,

---

[1]) Die gleichmäßige Stetigkeit von $L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha)$ ergibt sich auf Grund der Bemerkung auf der S. 33, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{B}^{(m)}$ ein $\mathfrak{S}$-Bereich ist.

Wie ich nachträglich bemerkt habe, lassen sich die letzten Betrachtungen vereinfachen, wenn man an Stelle von (8. 36): $z_1^* = z_1$, $z_2^* = f_m(z_2)$ setzt, wo $f_m(z_2)$, die in der Bemerkung angegebene Funktion und $r_m(z_2)$ ihre Umkehrfunktion ist. Unter Anwendung des Satzes, daß $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(z_2)$ (gleichmäßig in $\mathfrak{H}$) ist, folgert man aus dem Hilfssatz III, daß $\lim\limits_{m\to\infty} L^{II2}_{\mathfrak{B}^{(m)}}(Q,\alpha) = L^{II2}_{\mathfrak{S}}(Q,\alpha)$ ist, wo $\mathfrak{S} = \sum\limits_{\gamma}^{\mathfrak{H}} \mathfrak{T}\left[\Psi(\gamma)+\dfrac{\pi}{2}, \pi, \varrho\right]$, $\varrho>0$ bedeutet. Für: $\vartheta_1(0) + \varepsilon \leqq \alpha \leqq \vartheta_2(0) - \varepsilon$ kann man auf Grund des Dinischen Satzes zeigen, daß die Konvergenz gleichmäßig erfolgt.

lassen sich auch bei diesen Punkten wichtige Klassen von Fällen aussondern, bei denen eine Aussage über das Unendlichwerden der Kernfunktion bei der Annäherung an den Punkt Q gemacht werden kann. Wir werden dabei die Annäherung $\mathsf{A}^{IV}(a_1, a_2)$ bei den Betrachtungen dieses Paragraphen zugrundelegen. In der Arbeit: „Über die schlichten Bereiche in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen“ [1]) wurden die bikonvexen Punkte betrachtet, deren Definition hier wiederholt werden soll: Eine analytische Ebene $\mathfrak{E}$, die durch den Randpunkt Q geht, soll für den Punkt Q in bezug auf den inneren Punkt $P(a_1, a_2)$ von $\mathfrak{B}$ eine Trennebene heißen, wenn der durch den Punkt P und $\mathfrak{E}$ gelegte lineare (dreidimensionale) Raum $\mathfrak{e}$ so durch $\mathfrak{E}$ in zwei Teile zerlegt wird, daß der eine Teil keine gemeinsamen Punkte mit dem Inneren von $\mathfrak{B}$ besitzt. Einen Randpunkt Q nennen wir in bezug auf P bikonvex, wenn mindestens zwei verschiedene Trennebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ in bezug auf P durch Q gehen. Die Aussage, daß der Randpunkt Q in bezug auf eine Menge (von Punkten) bikonvex ist, wird im folgenden stets so gemeint sein, daß Q in bezug auf jeden Punkt der Menge bikonvex ist und daß dabei die beiden Trennebenen, die durch Q gehen, dieselben bleiben. Es wird z. B., wie man leicht einsieht, ein Randpunkt Q, durch welchen zwei lineare Räume $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ gehen, die mit dem Inneren von B keine gemeinsamen Punkte besitzen und deren Schnitt eine nichtanalytische Ebene bildet, in bezug auf das Innere von $\mathfrak{B}$ bikonvex sein. Die beiden analytischen Ebenen, die in $\mathfrak{e}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_2$ liegen und die durch Q gehen, wird man dabei als die Trennebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ benutzen. Das Korollar II der eben zitierten Arbeit besagt nun über das Unendlichwerden der Kernfunktion:

Ist Q in bezug auf die, mit Ausnahme von Q selbst, im Innern von $\mathfrak{B}$ verlaufende Strecke PQ bikonvex, so gilt

$$(9.1)\qquad L_{\mathfrak{B}}^{IV\,4}(Q; a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \left(\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}\, t\right)^4 \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(a_1 t, a_2 t; \overline{a_1} t, \overline{a_2} t) \geqq \frac{\sin^2 \varepsilon}{256\,\pi^2} \qquad (t \text{ positiv}),$$

wobei ε den Winkel bedeutet, den die beiden Trennebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ miteinander bilden.

Wir führen nun eine zweite wichtige Klasse von Randpunkten Q ein, nämlich die Sternpunkte, für die wir die Existenz von $L_{\mathfrak{B}}^{IV\,4}(Q; a_1, a_2)$ nachweisen werden.

Unter einen Sternpunkt soll ein Randpunkt $Q(0, 0)$ mit folgender Eigenschaft verstanden werden: Es existiert eine positive Zahl s_0, so daß der vermittelst der Transformation

$$(9.2)\qquad z_1' = sz_1, \qquad z_2' = sz_2 \qquad (s \geqq s_0)$$

aus $\mathfrak{B}$ entstandene Bereich $\mathfrak{B}_s$ den Bereich $\mathfrak{B}$ enthält. (Man kann leicht Sternpunkte angeben; z. B. ist — wie man sofort einsieht — ein Randpunkt Q mit folgender Eigenschaft stets ein Sternpunkt: Es gibt eine Hyperkugel $\mathfrak{H}$ mit dem Mittelpunkt $Q(0, 0)$ und dem Radius $r > 0$, deren Randhyperfläche $\mathfrak{h}$ den Bereich $\mathfrak{B}$ in zwei Teile zerlegt, $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$, wobei $\mathfrak{B}_1$ (der Durchschnitt von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$) ein konvexer Bereich ist und die Verbindungsstrecke QP eines beliebigen Punktes P von $\mathfrak{B}_2 (= \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1)$ den Durchschnitt von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{h}$ schneidet. Ist $\varrho_{\max}$ der Radius einer Hyperkugel um Q, die $\mathfrak{B}$ enthält, so kann man dann $s_0 = \frac{\varrho_{\max}}{r}$ nehmen.) Über das Verhalten der Kernfunktion in der Umgebung von Q gilt der

Satz VII. *Bei der geradlinigen Annäherung $\mathsf{A}^{IV}(a_1, a_2)$ an einen Sternpunkt Q von $\mathfrak{B}$ existiert*

[1]) Journ. f. reine u. ang. Math. **162** (1930) S. 262—270.

$$(9.3)\qquad L_{\mathfrak{B}}^{IV4}(Q; a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} (\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}\, t)^4\, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(a_1 t, a_2 t; \overline{a_1} t, \overline{a_2} t) \qquad (t > 0)$$

und hat für festes a_1, a_2 einen endlichen Wert.

Beweis: Durch die Transformation

$$z_1' = s_0^n z_1, \qquad z_2' = s_0^n z_2 \qquad (n \text{ ganz positiv})$$

geht $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}_{s_0^n}$ über, und es gilt nach (1. 15)

$$(9.4)\qquad \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_{s_0^n}}(a_1, a_2; \bar{a}_1, \bar{a}_2) = \frac{1}{s_0^{4n}} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{a_1}{s_0^n}, \frac{a_2}{s_0^n}, \frac{\bar{a}_1}{s_0^n}, \frac{\bar{a}_2}{s_0^n}\right).$$

Da Q ein Sternpunkt ist, folgt nach (9. 2)

$$(9.5)\qquad \mathfrak{B}_{s_0^n} > \mathfrak{B}_{s_0^{n-1}}$$

und nach (1. 12)

$$(9.6)\qquad \frac{1}{s_0^{4n}} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{a_1}{s_0^n}, \frac{a_2}{s_0^n}, \frac{\bar{a}_1}{s_0^n}, \frac{\bar{a}_2}{s_0^n}\right) = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_{s_0^n}}(a_1, a_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2)$$

$$\leqq \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_{s_0^{n-1}}}(a_1, a_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = \frac{1}{s_0^{4n-4}} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{a_1}{s_0^{n-1}}, \frac{a_2}{s_0^{n-1}}; \frac{\bar{a}_1}{s_0^{n-1}}, \frac{\bar{a}_2}{s_0^{n-1}}\right),$$

d. h. $\frac{1}{s_0^n} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{a_1}{s_0^n}, \frac{a_2}{s_0^n}; \frac{\bar{a}_1}{s_0^n}, \frac{\bar{a}_2}{s_0^n}\right)$ [n ganz positiv] ist eine mit wachsenden n nicht zunehmende Zahlenfolge, woraus die Existenz von

$$(9.7)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_0^{4n}} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{a_1}{s_0^n}, \frac{a_2}{s_0^n}; \frac{\bar{a}_1}{s_0^n}, \frac{\bar{a}_2}{s_0^n}\right)$$

folgt. Ist nun $\frac{1}{t} \geqq s_0^{n+1}$ (und somit $\frac{1}{\frac{t}{s_0^n}} \geqq s_0$), so wird, da $\mathfrak{B}_{\frac{1}{t}} > \mathfrak{B}_{s_0^n}$ ist,

$$t^4\, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(a_1 t, a_2 t; \overline{a_1} t, \overline{a_2} t) = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_{\frac{1}{t}}}(a_1, a_2; \bar{a}_1, \bar{a}_2) \leqq \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_{s_0^n}}(a_1, a_2; \bar{a}_1, \bar{a}_2)$$

$$= \frac{1}{s_0^{4n}} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{a_1}{s_0^n}, \frac{a_2}{s_0^n}; \frac{a_1}{s_0^n}, \frac{a_2}{s_0^n}\right)$$

sein, woraus man nun in Verbindung mit der Existenz von (9. 7) die Existenz von (9. 3) erschließt, w. z. b. w.

Ist nun ein Randpunkt Q ein bikonvexer Sternpunkt, so gilt also für jeden inneren Punkt P (a_1, a_2) von $\mathfrak{B}$ bei der Annäherung $\mathsf{A}^{IV}(a_1, a_2)$

$$(9.8)\qquad 0 < L_{\mathfrak{B}}^{IV4}(Q; a_1, a_2) < \infty\,,$$

und Q ist somit im Sinne unserer früheren Definition (vgl. S. 9) *ein Limespunkt vierter Ordnung.*

Herrn A. Plessner bin ich für mehrfache Ratschläge bei der Durchführung der vorliegenden Arbeit zum Dank verpflichtet.

Eingegangen 18. Februar 1932.

Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen.

D. Doppelintegrale zweiter Gattung.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. Saale.

Die Definition der Doppelintegrale zweiter Gattung stammt von Herrn E. Picard, ebenso die Definition der linearen Abhängigkeit solcher Integrale und die Bestimmung der Zahl ϱ_0 der linear unabhängigen. Man vgl. E. Picard et G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, I, II. Dies Buch wird im folgenden mit PS unter Angabe von Band und Seitenzahl zitiert.

In dieser Arbeit wird die Zahl ϱ_0 auf neuem Wege bestimmt, und zwar unter Ausnutzung des Satzes, daß in einem algebraischen Körper einer Veränderlichen vom Geschlechte q die Zahl der linear unabhängigen Integrale zweiter Gattung gleich $2q$ ist. Ganz von selbst ergeben sich dabei, wie bei Picard, Sätze über einfache Integrale der dritten Gattung.

I. Definition der Doppeldifferentiale zweiter Gattung.

1. *Die Definition.* PS, II, 159 ff.

Ein Differential $T\,dxdy$ des Körpers K heißt von der zweiten Gattung, wenn es für jede Stelle S von K zwei Funktionen G und H aus K so gibt, daß

$$\left\{T - \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\} dxdy \tag{1}$$

in der Umgebung von S ganz ist, also die Form $\mathfrak{P}(u, v)\,du\,dv$ hat, wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe der beiden Ortsuniformisierenden u, v ist. Es heißt dann T ein Integrand zweiter Gattung.

2. *Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit.*

Hat ein Integrand T zweiter Gattung die Form

$$T = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}, \tag{2}$$

wo A und B dem Körper K angehören, so wollen wir sagen: T ist äquivalent zu $0, T \sim 0$. Sind T_1 und T_2 zwei Integranden 2. Gattung, so nennen wir sie äquivalent, $T_1 \sim T_2$, wenn $T_1 - T_2 \sim 0$. Irgend ν Integranden 2. Gattung $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ heißen linear abhängig, wenn es Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ gibt, die nicht alle verschwinden, so daß

$$c_1 T_1 + c_2 T_2 + \cdots + c_\nu T_\nu \sim 0.$$

Andernfalls heißen sie linear unabhängig.

Unsere Aufgabe ist, zu zeigen, daß die Zahl der linear unabhängigen Integranden 2. Gattung endlich ist, und diese Zahl zu bestimmen.

3. *Invarianz der in Nr. 1 und Nr. 2 gegebenen Definitionen.*

Sind x, y und ebenso x', y' je zwei von einander unabhängige Funktionen aus K und setzen wir

$$A\,dx + B\,dy = A'\,dx' + B'\,dy',$$

so sind A' und B' gleichzeitig mit A und B Funktionen aus K und es ist identisch

$$\left\{\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right\} dxdy = \left\{\frac{\partial A'}{\partial y'} - \frac{\partial B'}{\partial x'}\right\} dx'\, dy'.$$

Daraus folgt: Die Definition der Integranden zweiter Gattung und die Definition ihrer linearen Unabhängigkeit ist invariant gegenüber birationaler Transformation.

II. Darstellung der Integranden 2. Gattung.

1. *Verhalten in der Umgebung einer Unendlichkeitskurve.*

Das Differential 2. Gattung $T\,dxdy$ werde längs der Kurve $\mathfrak{C}$ unendlich. Es sei $C(x, y)$ die Projektion von $\mathfrak{C}$ und es sei C von x abhängig. Eine der Lösungen von $C = 0$ sei $x = x_1$ und in der Entwicklung von T nach Potenzen von $x - x_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{C}$ sei a der Koeffizient von $(x - x_1)^{-1}$. Es sei also mit anderen Worten a das Residuum von $T\,dx$ für $x = x_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{C}$. Da T von der zweiten Gattung ist, so gibt es zwei Funktionen G und H aus K, so daß das Differential (1) nicht mehr längs $\mathfrak{C}$ unendlich wird. Wir denken uns G und H auch nach Potenzen von $x - x_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{C}$ entwickelt. Nun kann $\partial H/\partial x$ die (-1)-te Potenz von $x - x_1$ nicht enthalten. Ist daher g der Faktor von $(x - x_1)^{-1}$ in der Entwicklung von G, so muß $a = dg/dy$ sein, d. h. es muß das Residuum a von $T\,dx$ der Differentialquotient einer algebraischen Funktion von y sein. Oder: es ist $\int a\,dy$ eine algebraische Funktion von y.

Es gibt dann immer auch eine Funktion A aus K, die längs $\mathfrak{C}$ von der ersten Ordnung unendlich wird, während sie im übrigen in bezug auf x ganz ist, und deren Entwicklung in der Umgebung von $\mathfrak{C}$ die Form hat $A = g(x - x_1)^{-1} + \cdots$ (A, II, Nr. 13). Es fehlt dann in $T_1 = T - \partial A/\partial y$ die (-1)-te Potenz von $x - x_1$. Es ist $T_1 \sim T$ und es hat $T_1\,dxdy$ keine Unendlichkeitskurven, die nicht auch $T\,dxdy$ hätte, abgesehen von Kurven, deren Projektion von x unabhängig ist. Da entsprechendes für jede Unendlichkeitskurve von $T\,dxdy$ gilt, deren Projektion von x abhängt, einschließlich derjenigen, deren Projektion $x = \infty$ ist, so folgt:

Zu jedem Integranden zweiter Gattung aus K gibt es einen äquivalenten, der auch für $y =$ konst, also im Körper $K(y)$ ein Integrand zweiter Gattung ist.

Aus dem ersten Teil dieser Nummer ergibt sich noch durch Vertauschen von x mit y:

Es sei $\mathfrak{C}$ eine Kurve, längs der y konstant, etwa gleich b ist. Ist dann T ein Integrand zweiter Gattung aus K, so ist das Residuum von $(T\,dx)dy$ für $y = b$ in der Umgebung von $\mathfrak{C}$ von der Form da, wo a eine algebraische Funktion von x ist, und zwar aus $K(b)$.

Ist daher γ ein den Punkt b umschließender Kreis der y-Ebene und k ein Periodenkreis von $K(y)$, so ist

$$\oint_k \left\{\oint_\gamma T\,dy\right\} dx = 2\pi i \oint_k da = 0.$$

Es sei im besonderen k ein invarianter Kreis. (B, Nr. 10). Dann bleibt k ungeändert, wenn y den Kreis γ durchläuft. Wir können ferner γ so klein wählen, daß k keinen Unendlichkeitsstellen von $T\,dxdy$ auszuweichen braucht, wenn y den Kreis γ durchläuft. Es können dann die beiden Integrationen über γ und k vertauscht werden. Wir erhalten so

$$\oint_\gamma \left\{\oint_k T\,dx\right\} dy = \oint_\gamma \omega(y)\,dy = 0.$$

Dabei ist $\omega(y)$ die zu k gehörende Periode von $\int T\,dx$. Daher haben wir:

Ist T ein Integrand zweiter Gattung aus K und ist $\omega(y)$ die zu einem invarianten Kreise gehörende Periode von $\int T\,dx$, also eine rationale Funktion von y, so hat das Differential $\omega(y)dy$ kein Residuum.

2. *Verhalten in der Umgebung eines Punktprimteilers.*

Es sei $\mathfrak{V}$ ein Punktprimteiler, längs dessen das Differential zweiter Gattung $T\,dxdy$ unendlich wird. Es sei S eine Stelle, durch die $\mathfrak{V}$ geht. Die Ortsuniformisierenden seien u und v und es sei u die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{V}$. In der Umgebung von S ist $T\,dxdy = \mathfrak{T}(u, v)dudv$, wo $\mathfrak{T}$ der Quotient zweier gewöhnlichen Potenzreihen von u, v ist. Wie in der vorigen Nummer, folgt:

Das Residuum von $\mathfrak{T}(u, v)du$ für $u = 0$ muß der Differentialquotient einer algebraischen Funktion von v nach v sein.

Es sei z. B. der Körper K durch $z^2 = x^4 + y^4$ definiert. Dann ist das Differential $z^{-1}\,dx\,dy$ nicht von der zweiten Gattung. Wir haben nämlich in der Umgebung von $x = y = 0$ folgende Uniformisierung

$$x = u, \quad y = uv, \quad z = u^2\sqrt{1 + v^4}, \quad \frac{dx\,dy}{z} = \frac{du\,dv}{u\sqrt{1 + v^4}}.$$

Das Residuum von $\{\mathfrak{T}\,dv\}du$ für $u = 0$ ist also in diesem Falle $(1 + v^4)^{-\frac{1}{2}}dv$ und das ist nicht das Differential einer algebraischen Funktion von v.

3. *Die Integranden zweiter Gattung als Funktionen aus $K(y)$.*

Es seien $R_1, R_2, \ldots, R_{2q}$ $2q$ linear unabhängige Integranden zweiter Gattung des Körpers $K(y)$. Sie seien so gewählt, daß die Differentiale $R_k\,dxdy$ im endlichen überall endlich sind. Wenn ferner in der Entwicklung von R_k nach Potenzen von y in der Umgebung von $y = \infty$ das Anfangsglied gleich $r_k y^{\varrho_k}$ ist, so sollen die r linear unabhängige Integranden zweiter Gattung des Körpers $\mathfrak{M} = K(\infty)$ sein (A, II, Nr. 11). Diejenigen Werte von y, für die die R_k linear abhängig werden, haben wir Ausnahmewerte genannt. Ihre Zahl ist endlich und sei mit N bezeichnet. Diese Werte von y seien $b_1, b_2, \ldots, b_N$. Die R_k seien so gewählt, daß die Zahl N möglichst klein ist. Dann sind wahrscheinlich die b_i die singulären Werte von y, d. h. diejenigen, für die das Geschlecht des Körpers $K(y)$ kleiner ist als q. Auf jeden Fall aber sind diese singulären Werte unter den b_i enthalten.

Wir bezeichnen die Matrix, die in einer Spalte die $2q$ Funktionen R_k enthält, mit R. Es ist dann jeder Integrand zweiter Gattung aus $K(y)$ in der Form $gR + \partial Q/\partial x$ darstellbar, wo g eine Zeile von $2q$ rationalen Funktionen von y ist, während Q eine Funktion aus K ist. Ferner besteht eine Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial y} = cR + \frac{\partial S}{\partial x}, \tag{3}$$

wo c eine quadratische Matrix von rationalen Funktionen von y ist, während S eine Spalte von $2q$ Funktionen aus K ist (A, II, Nr. 2).

Da es nach den Ergebnissen der vorigen Nummer zu jedem Integranden zweiter Gattung aus K einen äquivalenten gibt, der ein Integrand zweiter Gattung aus $K(y)$ ist, so folgt:

Jeder Integrand T zweiter Gattung aus K läßt sich in der Form

$$T = tR + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

darstellen, wo t eine Zeile von $2q$ rationalen Funktionen von y ist, während A und B dem Körper K angehören.

Ferner:

Es genügt, alle Funktionen der Gestalt

$$T = tR \tag{4}$$

zu betrachten, wenn man eine Gesamtheit von Integranden zweiter Gattung aus K haben will, von denen alle anderen linear abhängen.

Es ist aber nicht jede Funktion der Form (4) ein Integrand zweiter Gattung, und wenn sie es ist, so kann sie zu Null äquivalent sein. Es sind also die beiden Fragen zu beantworten:

Erstens: Wann ist eine Funktion der Form tR zu 0 äquivalent?

Zweitens: Welchen Bedingungen muß t genügen, damit tR ein Integrand zweiter Gattung ist?

4. *Funktionen der Form tR, die zu Null äquivalent sind. I.*

Es sei h eine Zeile von $2q$ rationalen Funktionen von y und es sei $hR \sim 0$, so daß

$$hR = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}. \tag{5}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle: I. G ist in $K(y)$ ein Integrand zweiter Gattung. II. G ist in $K(y)$ ein Integrand dritter Gattung. Zunächst behandeln wir nur den Fall I. Dann ist

$$G = gR + \frac{\partial G_0}{\partial x}. \tag{6}$$

Setzen wir $H^* = gS$, so folgt wegen (3)

$$\frac{\partial G}{\partial y} = (g' + g\,c)R + \frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H^*}{\partial x} = hR + \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Führen wir also die Bezeichnungen

$$G^* = gR = G - \frac{\partial G_0}{\partial x}, \quad H^* = H$$

ein, so wird in Verbindung mit (5), (6)

$$hR = \frac{\partial G^*}{\partial y} - \frac{\partial H^*}{\partial x} = (g' + gc)R,$$

so daß man von vornherein in (6) $G_0 = 0$ annehmen kann. Also:

Im Falle I ist dann und nur dann $hR \sim 0$, wenn h die Form

$$h = g' + gc \tag{7}$$

hat, wo g eine Zeile von $2q$ rationalen Funktionen von y ist. Es ist dann

$$hR = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}, \text{ wo } G = gR,\ H = gS. \tag{8}$$

Den Fall II werden wir erst später in IV, Nr. 1 behandeln.

III. Reduktion der Integranden 2. Gattung.

1. *Reguläre endliche Werte von y.*

Es sei $T = tR$ ein Integrand zweiter Gattung. Nach II, Nr. 4 ist $T \sim (t - h)R$, wenn $h = g' + gc$. Wir haben daher die Möglichkeit t durch Subtraktion eines Systems h von der Form $g' + gc$ zu vereinfachen, ohne T wesentlich zu ändern. Es sei a ein endlicher Wert von y und kein Ausnahmewert. Ferner sei $\alpha(y-a)^{-\lambda}$ das Anfangsglied in der Entwicklung von t nach steigenden Potenzen von $y - a$. Dabei sei α nicht 0. Dann sagen wir, die Ordnung $[t]$ von t ist α für $y = a$. Da a regulär ist, so ist die Matrix c in (3) ganz für $y = a$. (A, II, Nr. 11, gegen Ende.) Setzen wir also, wenn $\lambda > 1$,

$$g = -\frac{\alpha}{\lambda - 1}(y-a)^{1-\lambda}, \quad g' = \alpha(y-a)^{-\lambda},$$

so ist das Anfangsglied von h gleich $\alpha(y-a)^{-\lambda}$, d. h. gleich dem von t, und $t - h$ hat eine kleinere Ordnung als t. So können wir fortfahren, bis wir zu einem zu T äquivalenten Integranden $T_0 = sR$ kommen, bei dem die Ordnung von s für $y = a$ höchstens gleich 1 ist. Ist $s = \sigma(y-a)^{-1} + \cdots$, und wird R für $y = a$ zu r, so ist der Faktor von $(y-a)^{-1}$

in T_0 gleich σr und dieser muß nach II, Nr. 1 die Form de/dx haben, wo e eine algebraische Funktion von x ist, so daß

$$r = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \cdots + \sigma_{2q} r_{2q} + \frac{de}{dx}. \tag{9}$$

Da aber a ein regulärer Wert von y ist, so sind die $2q$ Integranden zweiter Gattung r_i des Körpers $K(a)$ linear unabhängig und aus (9) folgt $\sigma = 0$. D. h. das System s ist ganz in der Umgebung von $y = a$.

Ergebnis: Wir können uns auf solche Funktionen $T = tR$ beschränken, wo t für jeden endlichen Wert von y, der nicht Ausnahmewert ist, ganz ist, so daß die $2q$ rationalen Funktionen t_k im Endlichen höchstens an den N Stellen b_i unendlich werden.

2. *Die Ausnahmewerte von y.*

Es sei b ein Ausnahmewert von y. Wir zeigen zunächst, daß für genügend großes λ die Ordnung $[h]$ von $h = g' + gc$ mindestens gleich $\lambda + 1 - \eta$ ist, wenn die Ordnung $[g]$ von g gleich λ ist, wobei η eine von b, aber nicht von λ, abhängende Zahl ist. Es sei α die Ordnung von c für $y = b$, was bedeuten soll, daß α die kleinste positive Zahl ist, für die $(y-b)^\alpha c$ ganz ist. Wenn $\alpha = 0$, wenn also c ganz ist, ist die Behauptung klar, und zwar mit $\eta = o$. Nach steigenden Potenzen von $y - b$ entwickelt, sei

$$c = c_0(y-b)^{-\alpha} + c_1(y-b)^{-\alpha+1} + \cdots, \quad c_0 \neq 0, \tag{10}$$

$$g = g_0(y-b)^{-\lambda} + g_1(y-b)^{-\lambda+1} + \cdots, \quad g_0 \neq 0, \tag{11}$$

so daß

$$\begin{aligned}(y-b)^{\lambda+1} h = &-\lambda g_0 - (\lambda-1)g_1(y-b) - (\lambda-2)g_2(y-b)^2 - \cdots \\ &+ \{g_0 c_0 + (g_0 c_1 + g_1 c_0)(y-b) + \cdots\}(y-b)^{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{12}$$

Es sei *erstens* $\alpha = 1$. Dann ist $[h] < \lambda + 1$ dann und nur dann, wenn

$$g_0(c_0 - \lambda e) = 0, \tag{13}$$

wo e die Einheitsmatrix der Ordnung $2q$ ist. Hieraus folgt $|c_0 - \lambda e| = 0$. Da diese Gleichung für λ nicht identisch erfüllt sein kann, so hat (13) für genügend großes λ sicher keine Lösung. Damit ist unsere Behauptung für $\alpha = 1$ bewiesen, und zwar mit $\eta = 0$.

Es sei *zweitens* $\alpha > 1$. Soll $[h] < \lambda + 1 - \eta$ sein, so müssen auf der rechten Seite von (12) die Koeffizienten der Potenzen von $y - b$ von der $-(\alpha-1)$-ten bis einschließlich der η-ten verschwinden. Wir erhalten so Gleichungen für die ersten Systeme g_i und für die Zahl λ. Die ersten $\alpha - 1$ dieser Gleichungen sind von λ unabhängig. Wir bezeichnen ihre Gesamtheit mit G_1 und die der übrigen $\eta + 1$ mit G_2. Da die Differentialgleichung $g' + gc = 0$ zur Fuchsschen Klasse gehört, (A, II, Nr. 3), so hat sie in der Umgebung von $y = b$ mindestens eine Lösung der Form (11), andererseits aber nur eine endliche Anzahl. Daraus folgt, daß die Gleichungen G_1 immer eine Lösung haben, daß aber die Gleichungen G_2 sich nur für eine endliche Zahl von Werten des Exponenten λ befriedigen lassen, wenn nur η genügend groß gewählt ist. Wenn daher λ nicht gleich einem der möglichen Werte ist, wenn also z. B. λ genügend groß ist, so sind die Gleichungen G_2 unlösbar. I. a. gibt schon die erste der Gleichungen G_2 eine Bedingung für λ, sodaß man $\eta = 0$ wählen kann.

Das Ergebnis können wir in folgender Form aussprechen, wobei wir λ durch $\lambda + \eta$ ersetzen: Soll die Ordnung $[h]$ von $h = g' + gc$ für $y = b$ höchstens gleich $\lambda + 1$ sein, so darf die Ordnung $[g]$ von g höchstens $\lambda + \eta$ sein, wenn nur λ genügend groß ist. Dabei ist η eine nur von dem Verhalten der Matrix c in der Umgebung von $y = b$ abhängende Zahl. Ist andrerseits $[g] = \lambda + \eta$, so kann man erreichen, daß $[h] \leqq \lambda + 1$. Die Zahl der hierzu zu erfüllenden linear unabhängigen Bedingungen sei ε.

Die zur Stelle b_i gehörenden Zahlen η, ε seien η_i, ε_i.

3. *Der Wert* $y = \infty$.

In der Umgebung von $y = \infty$ sei

$$R_k = r_k y^{\varrho_k} + \cdots, \; S_k = s_k y^{\sigma_k} + \cdots, \; c_{kl} = \gamma_{kl} y^{-\sigma_{kl}} + \cdots. \tag{14}$$

Es sind dann (vgl. II, Nr. 3) die r_k linear unabhängige Integranden zweiter Gattung des Körpers $K(\infty)$. Aus der k-ten der Gleichungen (3) folgt

$$\varrho_k r_k y^{\varrho_k - 1} + \cdots = \gamma_{k1} r_1 y^{\varrho_1 - \sigma_{k1}} + \gamma_{k2} r_2 y^{\varrho_2 - \sigma_{k2}} + \cdots + \frac{ds_k}{dx} y^{\sigma_k}.$$

Da dies eine Identität ist, so müssen unter anderem die Anfangsglieder links und rechts dieselben sein. Das darf aber keine lineare Gleichung zwischen ds_k/dx und den r_i ergeben, da die r_i linear unabhängig sind. Daraus folgt:

1. Wenn $\varrho_k = 0$, $\varrho_l - \sigma_{kl} \leqq -2$;
2. Wenn $\varrho_k \neq 0$, $\sigma_{kk} = 1$, $\gamma_{kk} = \varrho_k$, $\varrho_l - \sigma_{kl} \leqq \varrho_k - 2$, $l \neq k$.

Es ist daher

$$\begin{aligned} &\sigma_{kl} \geqq \varrho_l - \varrho_k + 2, \text{ wenn } \varrho_k = 0 \text{ oder wenn } \varrho_k \neq 0 \text{ und } l \neq k; \\ &\sigma_{kk} = 1, \; \gamma_{kk} = \varrho_k, \text{ wenn } \varrho_k \neq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Unter $[T]$ verstehen wir die Ordnung des Unendlichwerdens der Funktion $T = tR$ für unendliches y. Soll $[T] \leqq \mu$ sein, so muß $[t_l] \leqq \mu - \varrho_l$ sein. Ebenso muß $[h_l] \leqq \mu - \varrho_l$ sein, wenn $[hR] \leqq \mu$ sein soll. Nun sei

$$[g_l] = \sigma - \varrho_l + 1, \quad \text{also} \quad g_l = \gamma_l y^{\sigma - \varrho_l + 1} + \cdots.$$

Dann ist

$$[g_l'] = \sigma - \varrho_l, \quad [g_k c_{kl}] = \sigma - \varrho_k + 1 - \sigma_{kl}. \tag{16}$$

Für $\varrho_l \neq 0$ folgt hieraus wegen (15)

$$[g_k c_{kl}] \leqq \sigma - \varrho_l - 1, \quad k \neq l, \quad [g_l c_{ll}] = \sigma - \varrho_l.$$

Die höchste in h_l vorkommende Potenz von y ist daher die $(\sigma - \varrho_l)$-te und diese kommt in den Summanden g_l' und $g_l c_{ll}$ vor. Ihr Koeffizient ist $\gamma_l(\sigma + 1)$ und also sicher nicht 0, wenn $\sigma > 0$.

Für $\varrho_l = 0$ ist nach (15), (16)

$$[g_k c_{kl}] \leqq \sigma - \varrho_l - 1.$$

Daher enthält in diesem Falle nur der Summand g_l' von h_l die $(\sigma - \varrho_l)$-te Potenz von y, während sonst nur kleinere Potenzen vorkommen.

Das Ergebnis ist: Es ist $[h_l] \leqq \mu - \varrho_l$ für $l = 1, 2, \ldots, 2q$ dann und nur dann, wenn $[g_k] \leqq \mu - \varrho_k + 1$ für $k = 1, 2, \ldots, 2q$.

4. *Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse.*

Wir setzen

$$\begin{aligned} &\varphi(y) = (y - b_1)(y - b_2) \cdots (y - b_N), \\ &\psi(y) = (y - b_1)^{\eta_1} (y - b_2)^{\eta_2} \cdots (y - b_N)^{\eta_N}, \quad \sum_{i=1}^{N} \eta_i = \eta, \end{aligned} \tag{17}$$

wo die η_i die in Nr. 2 eingeführten Zahlen sind. Wollen wir alle Funktionen $T = tR$ haben, für die $[t] \leqq \lambda$ an allen Stellen b_i und $[T] \leqq \mu$ für $y = \infty$, so haben wir zu setzen

$$t_k = \frac{\tau_k(y)}{\varphi(y)^\lambda}, \quad \text{wo } \tau_k \text{ ganz und } [\tau_k] \leqq N\lambda + \mu - \varrho_k.$$

Die Zahl $\{t\}$ der in gewöhnlichem Sinne linear unabhängigen Funktionen T dieser Art ist

$$\{t\} = \sum_{k=1}^{2q} [N\lambda + \mu - \varrho_k + 1]. \tag{18}$$

Unter den t gibt es Systeme, die wir mit h bezeichnet haben, die von der Form

$g' + gc$ sind. Soll $[h] \leqq \lambda$ an den Stellen b_i und $[hR] \leqq \mu$ für $y = \infty$ sein, so müssen die g_k die Form haben:

$$g_k = \frac{\gamma_k(y)}{\psi(y)\{\varphi(y)\}^{\lambda-1}}, \quad \text{wo } \gamma_k \text{ ganz und } [\gamma_k] \leqq (\lambda-1)N + \eta + \mu - \varrho_k + 1.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen hR sei $\{h\}$. Diese Zahl ist nicht gleich der Zahl der linear unabhängigen Funktionssysteme g_k. Ist nämlich π die Zahl der zu K gehörenden linear unabhängigen totalen Differentiale erster Gattung und ist p_2 das Geschlecht desjenigen Unterkörpers K_2 von K, der die nur von y abhängenden Funktionen enthält, so gibt es genau $2(\pi - p_2)$ linear unabhängige rationale Lösungen der Gleichung $g' + gc = 0$, (B, Nrn. 4, 14), so daß $\{h\}$ um $2(\pi - p_2)$ kleiner ist als die Zahl der linear unabhängigen g_k. Bedenken wir noch, daß an der Stelle b_i die g_k noch ε_i Bedingungen genügen müssen, (vgl. Nr. 2), so folgt

$$(19) \qquad \{h\} = \sum_{k=1}^{2q}[(\lambda-1)N + \eta + \mu - \varrho_k + 2] - 2(\pi - p_2) - \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i.$$

Aus (18) und (19) folgt

$$(20) \qquad \varrho' = \{t\} - \{h\} = 2q(N - \eta - 1) + 2(\pi - p_2) + \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i,$$

wo ϱ' zur Abkürzung für die Differenz $\{t\} - \{h\}$ eingeführt ist.

Die Zahl ϱ' ist noch nicht die Zahl der linear unabhängigen Doppeldifferentiale zweiter Gattung, und zwar aus folgenden Gründen nicht.

1. Es kann Funktionen hR geben, die äquivalent Null sind, ohne daß h die Form $g' + gc$ hat. Fall II in II, Nr. 4.

2. Die Residuen von $(tR\,dx)\,dy$ für $y = b_i$ und $y = \infty$ müssen Differentiale algebraischer Funktionen von x sein.

3. Es muß $T = tR$ in bezug auf die Punktprimteiler gewissen Bedingungen genügen. (II, Nr. 2).

Die gesuchte Zahl ϱ_0 der linear unabhängigen Integranden zweiter Gattung ist daher i. a. kleiner als ϱ', auf jeden Fall aber endlich, da ϱ' von λ und μ unabhängig ist.

IV. Totale Differentiale dritter Gattung.

1. *Funktionen der Form tR, die zu Null äquivalent sind. II.* (*Fall II aus II, Nr. 2*). Es sei

$$(21) \qquad hR = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

und es sei G ein Integrand *dritter* Gattung im Körper $K(y)$. Da $\partial G/\partial y$ wegen (21) in $K(y)$ ein Integrand zweiter Gattung ist, so müssen die Residuen von $G\,dx$ als eines Differentials von $K(y)$ konstant sein. Sind umgekehrt alle Residuen von $G\,dx$ konstant, so ist $\partial G/\partial y$ in $K(y)$ ein Integrand zweiter Gattung, so daß eine Gleichung der Form (21) besteht.

Es sei $\mathfrak{C}$ ein Kurvenprimteiler, und zwar der Einfachheit halber keine Verzweigungskurve. Die Projektion $C(x, y)$ von $\mathfrak{C}$ hänge nicht nur von y ab. Ferner sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ eine Basis für die Vielfachen von $(\mathfrak{Z}\mathfrak{C})^{-1}$. Eine Lösung von $C(x, y) = 0$ sei x_1 und das Anfangsglied in der Entwicklung von ξ_k nach Potenzen von $x - x_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{C}$ sei $\alpha_k(x - x_1)^{-1}$. Dann läßt sich jede Funktion des Koeffizientenkörpers, d. h. des Körpers $\mathfrak{C}$, also auch die Zahl 1 in der Form

$$1 = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \cdots + \gamma_n\alpha_n$$

darstellen, wo die γ_k Funktionen des Körpers $C(x, y) = 0$ sind. Die γ_k können und wollen wir als rationale Funktionen von y und als ganze rationale Funktionen von x wählen. Dann hat die Funktion

$$Q = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \cdots + \gamma_n \xi_n$$

die Form

$$Q = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{C}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}},$$

wo der Divisor $\mathfrak{Q}$ in bezug auf x ganz ist. Und es ist das Residuum von Qdx an $\mathfrak{C}$ gleich 1.

Es sei $\lambda = (\mathfrak{C}, \mathfrak{M})$ die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit einer Kurve $\mathfrak{M}_y$. Dann hat Qdx als Differential von $K(y)$ für endliches x an λ Stellen Residuen, die alle gleich 1 sind. Der Körper $K(y)$ kann bei beliebigem y zerfallen, etwa in die n_2 Körper $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n_2)}$, deren jeder vom Grade $\nu = n/n_2$ über dem Körper (x) der rationalen Funktionen von x ist. (C, I, Nr. 8.) Entsprechend zerfällt die Kurve $\mathfrak{M}_y$ in n_2 Primkurven $\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(n_2)}$. Da die Körper $K^{(i)}$ und ebenso die ihnen entsprechenden Kurven $\mathfrak{M}^{(i)}$ dadurch in einander überführbar sind, daß man y geeignete geschlossene Wege durchlaufen läßt, so verteilen sich die λ Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{M}_y$ gleichmäßig auf die Kurven $\mathfrak{M}^{(i)}$, so daß λ durch n_2 teilbar wird. Es sei $\lambda = n_2\mu$ und $(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}^{(i)}) = \mu$.

Wir bezeichnen Q auch mit Q_1 und die konjugierten Funktionen mit $Q_2, \ldots, Q_n$. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß die ersten ν der Q_i konjugierte Funktionen des Körpers $K^{(1)}$ sind, die folgenden ν dem Körper $K^{(2)}$ angehören usw. Für $x = \infty$ habe $Q_i dx$ das Residuum q_i. Da die Summe aller Residuen von $Q\,dx$ in jedem der Körper $K^{(l)}$ verschwinden muß, so gilt

$$(22) \qquad \sum_{i=(h-1)\nu+1}^{h\nu} q_i + \mu = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, n_2.$$

Wir setzen

$$(23) \qquad q_k + \frac{\mu}{\nu} = a_k, \text{ so daß } \sum_{i=(h-1)\nu+1}^{h\nu} a_i = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, n_2.$$

Es werde der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}$ als Divisor von $K(y)$ mit $\mathfrak{z}$ bezeichnet und es sei $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{z}^{-1}$ in $K(y)$. Wir bezeichnen ζ_i auch mit ζ_{1i} und die konjugierten mit $\zeta_{2i}, \ldots, \zeta_{ni}$, und zwar in der Weise, daß die i-ten ν dieser Funktionen dem Körper $K^{(i)}$ angehören. Es sei das Anfangsglied der Entwicklung von ζ_{ki} in der Umgebung von $x = \infty$ gleich $a_{ki}x^{-\sigma_i}$ und die Basis sei so gewählt, daß $|a_{ki}| \neq 0$. Es ist dann $\sigma_i \geqq 0$, und zwar sind genau n_2 der Exponenten σ_i gleich 0, etwa die n_2 letzten. (Man vgl. Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, (1902), 14. Vorlesung, § 4. Es ist zu beachten, daß hier der Körper einer Variabeln, nämlich $K(y)$, in n_2 Teilkörper zerfällt.) Wir können die letzten n_2 Funktionen ζ_i konstant wählen, etwa so, daß jede von ihnen in einem der Körper $K^{(h)}$ den Wert 1 hat und in den anderen gleich 0 ist. Die letzten n_2 Spalten von ζ und ebenso von (a_{kl}) enthalten dann jede ν Einsen und im übrigen Nullen und in jeder Zeile dieser n_2 Spalten ist eine Eins und sonst Nullen.

Die Spur von ζ_k in $K^{(h)}$ sei mit $S_h(\zeta_k)$ bezeichnet. Für $k > n - n_2$ ist bei unseren Festsetzungen die Spur 0 oder ν. Für $k \leqq n - n_2$ ist S_h eine rationale Funktion von x, und zwar eine ganze, da ζ_k für einen endlichen Wert a von x höchstens wie eine echt gebrochene Potenz von $(x-a)^{-1}$ unendlich werden kann. Da aber ζ_k und alle dazu konjugierten Funktionen für $x = \infty$ verschwinden, so ist $S_h(\zeta_k) = 0$ für $h \leqq n - n_2$. Wir haben daher bei passender Wahl der Bezeichnung

$$S_h(\zeta_k) = 0 \text{ für } k \leqq n - n_2,\ S_h(\zeta_{n-n_2+l}) = \begin{cases} \nu \text{ für } l = h, \\ 0 \text{ für } l \neq h. \end{cases}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n_2)$$

und als Folge davon

$$(24)\qquad \sum_{i=(h-1)\nu+1}^{h\nu} a_{ik} = 0 \text{ für } k \leqq n - n_2, \quad \sum_{i=(h-1)\nu+1}^{h\nu} a_{i,n-n_2+l} = \begin{cases} \nu & \text{für } l = h, \\ 0 & \text{für } l \neq h. \end{cases}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n_2)$$

Da $|a_{kl}| \neq 0$, so läßt sich jede Funktion des Körpers $\mathfrak{L}$, $(x = \infty)$, also auch die Funktionen a_k in (23), in der Form darstellen

$$a_k = a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \cdots + a_{kn}s_n,$$

wo die s_i rationale Funktionen von y sind. Aus (24) und (23) folgt, daß die n_2 letzten der Funktionen s_i identisch Null sind, so daß

$$a_k = a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \cdots + a_{k,n-n_2}s_{n-n_2}.$$

Setzen wir daher

$$A = s_1 x^{\sigma_1 - 1}\xi_1 + s_2 x^{\sigma_2 - 1}\xi_2 + \cdots + s_{n-n_2} x^{\sigma_{n-n_2}-1}\xi_{n-n_2},$$

so sind die hier auftretenden Exponenten $\sigma_i - 1$ alle positiv oder 0 und es hat $A\,dx$ für unendliches x die Residuen a_i. Es hat daher $(Q - A)dx$, das mit $P\,dx$ bezeichnet sei, wegen (23) für $x = \infty$ in jedem Blatt das Residuum $-\mu/\nu = -\lambda/n$. Ferner ist A bis auf Punktprimteiler und bis auf Primteiler, längs deren y konstant ist, ein Vielfaches von $\mathfrak{Z}^{-1}$, so daß P die Form hat

$$P = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{C}\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}},$$

wo $\mathfrak{H}$ in bezug auf x ganz ist. Es hat $P\,dx$ in $K(y)$ nur konstante Residuen, und zwar das Residuum 1 an den $\lambda = (\mathfrak{C}, \mathfrak{M}_y)$ Schnittpunkten von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{M}_y$ und das Residuum $-\lambda/n$ an den n Stellen, die bei $x = \infty$ liegen.

Es seien $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_\mu$ eine Reihe von Kurvenprimteilern, längs deren y nicht konstant ist. Es sei $\lambda_i = (\mathfrak{C}_i, \mathfrak{M})$ und es sei P_i eine Funktion der Form

$$P_i = \frac{\mathfrak{H}_i}{\mathfrak{Z}\mathfrak{C}_i\mathfrak{L}^{\alpha_i}\mathfrak{M}^{\beta_i}},$$

wo $\mathfrak{H}_i$ ganz ist in bezug auf x. Ferner habe $P_i\,dx$ in $K(y)$ an $\mathfrak{C}_i$ das Residuum 1 und bei $x = \infty$ in jedem Blatte das Residuum $-\lambda_i/n$. Wir setzen

$$A_i = \frac{1}{\lambda_i}P_i - \frac{1}{\lambda_0}P_0, \quad i = 1, 2, \ldots, \mu.$$

Es ist $A_i\,dx$ ein Differential dritter Gattung in $K(y)$ mit den Residuen $1/\lambda_i$ und $-1/\lambda_0$ an $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{C}_0$. Da diese konstant sind, so ist $\partial A_i/\partial y \cdot dx$ von der zweiten Gattung, so daß eine Gleichung der Form

$$(25)\qquad \frac{\partial A_i}{\partial y} - \frac{\partial B_i}{\partial x} = h_{i1}R_1 + h_{i2}R_2 + \cdots + h_{i,2q}R_{2q}$$

besteht, wo die B_i Funktionen aus K und die h_{ik} rationale Funktionen von y sind. Wir setzen

$$(26)\qquad u_i = h_{i1}R_1 + h_{i2}R_2 + \cdots + h_{i,2q}R_{2q}.$$

Es sind, wie aus (25) hervorgeht, die u_i Integranden zweiter Gattung. Wie aus den Untersuchungen des Abschnittes II hervorgeht, gibt es nur eine endliche Zahl von linear unabhängigen Integranden zweiter Gattung der Form tR, die sich nicht in der Form $\partial G/\partial y - \partial H/\partial x$ darstellen lassen, wo $G = gR$, $H = hS$, wo also $G\,dx$ ein Differential zweiter Gattung in $K(y)$ ist. Daraus folgt:

Ist die Zahl s und sind die Kurven $\mathfrak{C}_i$ passend gewählt, so gilt: Es gibt keine Konstanten c_i, die nicht sämtlich verschwinden, so daß

$$\sum_{i=0}^{s} c_i u_i = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

wäre, wo G und H dem Körper K angehören und G ein Integrand zweiter Gattung von $K(y)$ ist. Ist aber $\mathfrak{C}_{s+1}$ irgendeine $(s+2)$-te Kurve, so gibt es Konstanten c_i, die nicht alle Null sind, so daß

$$\sum_{i=1}^{s+1} c_i u_i = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{27}$$

wo G die eben angegebene Eigenschaft hat.

Hieraus ergibt sich dann weiter, daß die Zahl derjenigen linear unabhängigen Integranden zweiter Gattung der Form hR, die äquivalent 0 sind, die sich aber nur so in der Form $\partial G/\partial y - \partial H/\partial x$ darstellen lassen, daß G ein Integrand *dritter* Gattung in $K(y)$ ist, gleich s ist. Der Grund 1 in III, Nr. 4 bewirkt also, daß ϱ_0 um s kleiner wird als ϱ'.

2. *Totale Differentiale dritter Gattung, I.*

Setzen wir

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_{s+1} A_{s+1} - G = P,$$
$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + \cdots + c_{s+1} B_{s+1} - H = Q,$$

so wird nach (25), (26), (27)

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$

so daß

$$dw = P\,dx + Q\,dy$$

ein totales Differential wird. Da A_i längs $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{C}_0$ unendlich wird, G aber nicht, so kann P nicht identisch Null sein. Ist ferner c_i nicht Null, so wird dw längs $\mathfrak{C}_i$ von der ersten Ordnung unendlich. Daher ist dw ein totales Differential dritter Gattung.

3. *Totale Differentiale dritter Gattung, II.*

In der vorigen Nr. sind wir auf einem Umwege zu einfachen Integralen dritter Gattung gekommen. Wir wollen sie jetzt unmittelbar betrachten und die Ergebnisse vervollständigen. Vgl. A, II, Nr. 4.

Es sei $w = \int P\,dx + Q\,dy$ ein Integral dritter Gattung, das längs der Kurve $\mathfrak{C}$ logarithmisch unendlich wird. Es sei zunächst $\mathfrak{C}$ nicht Punktprimteiler und es sei $C(x,y)$ die Projektion von $\mathfrak{C}$. Es enthalte C die Veränderliche x und es sei $x = x_1$ eine Lösung von $C = 0$. In der Umgebung von $\mathfrak{C}$ ist dann, nach Potenzen von $x - x_1$ entwickelt,

$$w = a \log (x - x_1) + P_1(x - x_1),$$

wo P_1 eine Potenzreihe von $x - x_1$ ist, die höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthält. Da dw ein Differential des Körpers K ist, so muß a konstant sein. Es heißt a das Residuum von dw an $\mathfrak{C}$. Entwickeln wir nach Potenzen von C, so haben wir

$$w = a \log C(x, y) + P_2(C), \qquad dw = \frac{dC}{C} + P_2'\,dC.$$

Ist $\mathfrak{C}$ ein beliebiger Primteiler, also vielleicht ein Punktprimteiler, so sei S eine Stelle, durch die $\mathfrak{C}$ geht, aber keine andere Unendlichkeitskurve von w. Ist $\mathfrak{C}(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{C}$ für die Stelle S, so ist in der Umgebung von S

$$w = a \log \mathfrak{C}(u, v) + \mathfrak{G}(u, v), \qquad dw = a \frac{d\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} + \mathfrak{G}_1\,du + \mathfrak{G}_2\,dv,$$

wo $\mathfrak{G}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist. Auch hier ist a konstant und das Residuum von dw an $\mathfrak{C}$.

Da die Residuen konstant sind, so ergibt sich, in gewissem Sinne als Umkehrung

zu dem Ergebnis der vorigen Nr.: Ist $dw = P\,dx + Q\,dy$ ein totales Differential dritter Gattung, so ist $\partial P/\partial y$ ein Integrand zweiter Gattung in $K(y)$.

Wir können daher den gegen Ende von Nr. 1 bewiesenen Satz in folgender Form aussprechen: Lassen wir die Punktprimteiler und diejenigen Kurvenprimteiler außer acht, längs deren Projektion y konstant ist, so gilt: Ist die Zahl s und sind die $s+1$ Kurvenprimteiler $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s$ passend gewählt, so gibt es kein einfaches Integral dritter Gattung, das nur längs dieser Kurven logarithmisch unendlich würde. Ist aber $\mathfrak{P}$ eine $(s+2)$-te Kurve, so gibt es ein einfaches Integral, das längs $\mathfrak{P}$ und längs aller oder einiger der $\mathfrak{C}_i$ logarithmisch unendlich wird. Wir vervollständigen dies Ergebnis, indem wir die zunächst nicht berücksichtigten Primteiler auch beachten.

Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei Kurvenprimteiler, längs deren y konstant ist. Es sei etwa $y = a_i$ längs $\mathfrak{P}_i$, wobei $a_1 = a_2$ nicht ausgeschlossen sein soll. Es seien aber a_1 und a_2 keine Ausnahmewerte von y. Zu dem Werte a_i von y gehören n_2 Stellen des Körpers K_2. Zu einer von diesen gehört $\mathfrak{P}_i$, etwa zu $\mathfrak{p}_i$. Es sei dann dw_{12} ein Differential dritter Gattung aus K_2, das an den beiden Stellen $\mathfrak{p}_i$ und nur an diesen von der ersten Ordnung unendlich wird. Dann wird w_{12} als einfaches Integral des Körpers K längs $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und nur längs dieser Kurven logarithmisch unendlich. Daraus ergibt sich, daß man von den Kurven dieser Art nur eine zu den $\mathfrak{C}_i$ hinzuzufügen braucht, und daß s nur um 1 zu vergrößern ist, wenn der angegebene Satz auch unter Berücksichtigung dieser Kurven gelten soll.

Es sei jetzt b_i ein Ausnahmewert von y. Von den Primkurven, die im Zähler von $y - b_i$ enthalten sind, wird i. a. ein Teil unter die $\mathfrak{C}_i$ aufgenommen werden müssen, auf jeden Fall die Punktprimteiler. Denn ein einfaches Integral, das nur längs Punktprimteilern unendlich oder auch logarithmisch unendlich würde, kann es nicht geben (A, II, Nr. 5). Die Zahl der aufzunehmenden sei σ_i. In nicht gar zu singulären Fällen ist übrigens σ_i gleich der Zahl der im Zähler von $y - b_i$ enthaltenen Punktprimteiler. Es sei nämlich im Körper K_2 der Zähler $\mathfrak{m}_i$ von $y - b_i$ von der Form

$$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\,\mathfrak{a}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{a}_r^{\alpha_r}; \tag{28}$$

es liege also bei $y = b_i$ ein α_1-, ein α_2- und schließlich ein α_r-blättriger Verzweigungspunkt. Dann hat der Zähler $\mathfrak{M}_i$ von $y - b_i$ in K die Form

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{A}_1^{\alpha_1}\,\mathfrak{A}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{A}_r^{\alpha_r}\,\mathfrak{V}, \tag{29}$$

wo $\mathfrak{A}_k$ zu $\mathfrak{a}_k$ gehört und wo $\mathfrak{V}$ ein Divisor ist, der nur Punktprimteiler enthält. Es sei v ein Integral aus K_2, das in $\mathfrak{a}_k$ und in $\mathfrak{p}_1$ und nur in diesen Stellen logarithmisch unendlich wird, wo $\mathfrak{p}_1$ der oben benutzte Primteiler ist. In K ist v ein einfaches Integral, das nur längs $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{A}_k$ und vielleicht noch längs Punktprimteilern logarithmisch unendlich wird. Sind daher die $\mathfrak{A}_k$ Primkurven, so sind nur die in $\mathfrak{V}$ enthaltenen Punktprimteiler zu den $\mathfrak{C}_i$ hinzuzufügen, soweit die im Zähler von $y - b_i$ enthaltenen Primteiler in Frage kommen.

Setzen wir

$$\varrho = s + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i + 2, \tag{30}$$

so haben wir danach folgenden Satz von Picard, (PS, II, 241):

Es gibt im Körper K ϱ Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\varrho$, so daß es kein zu K gehöriges einfaches Integral dritter Gattung gibt, das nur längs dieser oder eines Teils dieser Kurven logarithmisch unendlich würde. Ist aber $\mathfrak{C}$ irgendein von den $\mathfrak{P}_i$ verschiedener Primteiler, so existiert immer ein einfaches Integral, das längs $\mathfrak{C}$ und längs aller oder eines Teils der Primteiler $\mathfrak{P}_i$ logarithmisch unendlich wird.

4. *Residuensatz.*

Es sei dw ein totales Differential dritter Gattung, das an den Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\nu$ und nur an diesen die von Null verschiedenen Residuen $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ hat. Ferner sei $\mathfrak{P}$ irgendeine Primkurve, die zunächst von den $\mathfrak{C}_i$ verschieden sei. Es sei S eine Stelle, wo $\mathfrak{P}$ eine oder mehrere der $\mathfrak{C}_i$ trifft. $\mathfrak{P}(u, v)$ und $\mathfrak{C}_i(u, v)$ seien die zugeordneten Funktionen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{C}_i$ für die Stelle S. Die Gleichung $\mathfrak{P}(u, v) = 0$ habe, vielleicht unter anderen, die Lösung $v = v_1$. Die Entwicklung von v_1 nach steigenden Potenzen von u schreite nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\lambda}}$ fort. Es sei

$$\mathfrak{C}_i(u, v_1) = u^{\frac{\gamma_i}{\lambda}} e(u), \tag{31}$$

wo $e(u)$ eine Einheit für $u = 0$ ist. Der durch $v = v_1$ definierte Primteiler des Körpers $\mathfrak{P}$ heiße $\mathfrak{a}$. Dann ist wegen (31) $\mathfrak{a}$ in dem Divisior, in den $\mathfrak{C}_i$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht, in der Potenz γ_i enthalten. Oder auch: $v = v_1$ liefert den Beitrag γ_i zur Zahl $(\mathfrak{C}_i, \mathfrak{P})$ der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_i$ mit $\mathfrak{P}$.

In der Umgebung von S ist

$$dw = \sum_{i=1}^{\nu} a_i \, d \log \mathfrak{C}_i(u, v) + d\mathfrak{G}(u, v),$$

wo $\mathfrak{G}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v oder der Quotient zweier ist. Wegen (31) ist daher im Körper $\mathfrak{P}$ in der Umgebung von $\mathfrak{a}$

$$dw = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i \, a_i \, \frac{du}{u} + dG(u),$$

wo $G(u)$ eine Potenzreihe von u ist, die höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthält. Da u an der Stelle $\mathfrak{a}$ von der Ordnung λ verschwindet, so ist $\sum \gamma_i a_i$ das Residuum von dw für $\mathfrak{P} = 0$, d. h. als eines Differentials des Körpers $\mathfrak{P}$. Da für alle anderen Stellen von $\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{P}$ von einer der Kurven $\mathfrak{C}_k$ geschnitten wird, dasselbe gilt, so ergibt sich, da die Summe aller Residuen gleich Null sein muß,

$$a_1(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{P}) + a_2(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{P}) + \cdots + a_\nu(\mathfrak{C}_\nu, \mathfrak{P}) = 0. \tag{32}$$

Es sei

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \mathfrak{P}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{P}_m^{\alpha_m}$$

ein Divisor, der nicht ganz zu sein braucht, dessen Primteiler $\mathfrak{P}_i$ aber zunächst von den Kurven $\mathfrak{C}_k$ verschieden seien; dann ist nach dem eben Bewiesenen

$$a_1(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{P}_i) + a_2(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{P}_i) + \cdots + a_\nu(\mathfrak{C}_\nu, \mathfrak{P}_i) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit α_i und summieren über i, so finden wir, daß (32) auch besteht, wenn wir $\mathfrak{P}$ durch einen Divisor $\mathfrak{Q}$ ersetzen, der keine der Kurven $\mathfrak{C}_i$ enthält. Es ist aber schließlich leicht zu sehen, daß in $\mathfrak{Q}$ auch die $\mathfrak{C}_i$ vorkommen dürfen. Ist das nämlich der Fall, so gibt es immer einen zu $\mathfrak{Q}$ äquivalenten Divisor $\mathfrak{Q}'$, der zu den $\mathfrak{C}_i$ teilerfremd ist. Es gilt dann (32), wenn man $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{Q}'$ ersetzt, also auch, wenn man statt $\mathfrak{P}$ den nun beliebigen Divisor $\mathfrak{Q}$ einführt, da $(\mathfrak{C}_i, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{C}_i, \mathfrak{Q}')$, wenn $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}'$. Also gilt:

Es sei dw ein zum Körper K gehöriges totales Differential dritter Gattung, das an den Primkurven $\mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, von Null verschiedene Residuen a_i hat, und es sei $\mathfrak{Q}$ irgendein Divisor. Dann ist

$$a_1(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{Q}) + a_2(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{Q}) + \cdots + a_\nu(\mathfrak{C}_\nu, \mathfrak{Q}) = 0. \tag{33}$$

Im besonderen gelten also die Gleichungen

$$(34) \qquad a_1(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_k) + a_2(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_k) + \cdots + a_\nu(\mathfrak{C}_\nu, \mathfrak{C}_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

so daß die Determinante $|(\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_k)|$ gleich Null ist.

Hierzu vergleiche man: F. Severi, Sulle totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica, Math. Ann. **62** (1906), S. 194, und PS, II, 497.

V. Die Zahl der linear unabhängigen Doppeldifferentiale zweiter Gattung.

1. *Berücksichtigung der Ausnahmewerte von y.*

Nach III, Nr. 4 und dem Schluß von IV, Nr. 1 gibt es

$$(35) \qquad \varrho' - s = 2q\,(N-1) + 2\,(\pi - p_2) - 2q \sum_{i=1}^{N} \eta_i + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i - s$$

Funktionen der Form tR, die in dem Sinne linear unabhängig sind, daß keine lineare Kombination von ihnen sich in der Form $\partial G/\partial y - \partial H/\partial x$ darstellen läßt. Aber diese Funktionen müssen noch den in III, Nr. 4 angegebenen Bedingungen 2 und 3 genügen, wenn sie Integranden zweiter Gattung sein sollen.

Es sei b_i einer der N Ausnahmewerte von y. Dann muß einmal das Residuum von $(t\,R\,dx)\,dy$ für $y = b_i$ das Differential einer algebraischen Funktion von x sein. Ferner ergeben sich Bedingungen für die t_k durch die Berücksichtigung der im Zähler von $y - b_i$ enthaltenen Punktprimteiler. Die Zahl der sich ergebenden Bedingungen sei ϑ_i. Wir nehmen im folgenden an, daß sie erfüllt sind.

2. *Der Wert $y = \infty$.*

Schließlich muß noch die Bedingung erfüllt sein, daß das Residuum von $(t\,R\,dx)\,dy$ für $y = \infty$ das Differential einer Funktion aus $K(\infty)$ ist. Ist $a\,dx$ dies Residuum, so ist notwendig und hinreichend, daß das Integral $\int a\,dx$, erstreckt über einen geschlossenen Weg in der Riemannschen Fläche $R(\infty)$, immer Null ist. Da aber ∞ ein regulärer Wert von y ist, so ist $a\,dx$ von der zweiten Gattung und es genügt daher, wenn $\int a\,dx$, erstreckt über jeden Periodenkreis, verschwindet. Solcher gibt es $2q$ linear unabhängige. Diese zerfallen in $r = 2(\pi - p_2)$ invariante und in $h = 2q - r$ variante. (B, Nr. 11.)

Ist k ein invarianter Kreis und $\omega(y)$ die zu ihm gehörende Periode von $\int t\,R\,dx$, so ergibt sich nach dem Schluß von II, Nr. 1, daß das Differential $\omega(y)dy$ für $y = \infty$ kein Residuum haben darf. Da sich aber tR für endliches y überall schon wie ein Integrand zweiter Gattung verhält, so hat $\omega(y)\,dy$ für endliches y nirgends ein Residuum und also von selbst keins für $y = \infty$, da ω eine rationale Funktion von y ist. Es sind daher nur noch $h = 2q - 2\pi + 2p_2$ Bedingungen zu erfüllen, die ausdrücken, daß die über die h varianten Kreise erstreckten Integrale $\int a\,dx$ verschwinden. Diese Bedingungen sind linear unabhängig, wie sich hier genau so beweisen läßt wie bei Picard und Simart. (PS, II, 405.)

3. *Vorläufige Formel für ϱ_0.*

Fassen wir zusammen, so haben wir für die Zahl ϱ_0 der linear unabhängigen Doppeldifferentiale zweiter Gattung den Wert

$$(36) \qquad \varrho_0 = \varrho' - s - \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i - (2q - 2\pi + 2p_2).$$

Setzen wir

$$(37) \qquad 2q - \delta_i = 2q\eta_i + \vartheta_i - \varepsilon_i - \sigma_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \delta_i = \delta,$$

so folgt aus (30), (35), (36)

$$(38) \qquad \varrho_0 = \delta - 4(q + p_2) + 4\pi - \varrho + 2.$$

Bei der Herleitung von (38) ist angenommen, daß die $4N$ Zahlen η_i, ε_i, ϑ_i, σ_i voneinander unabhängig sind. Darauf müssen wir noch etwas eingehen. Je N mit demselben Buchstaben bezeichnete dieser Zahlen sind von den andern $3N$ unabhängig, da sie sich auf etwas anderes beziehen.

Die η_i sind von einander unabhängig, wie sich aus ihrer Definition ohne weiteres ergibt. Die Zahl ε_i gibt an, wieviele Bedingungen die Funktionen der Matrix g des Abschnittes III in der Umgebung von $y = b_i$ erfüllen müssen, und zwar handelt es sich um lineare Gleichungen für die Koeffizienten der Reihenentwicklung von g nach Potenzen von $y - b_i$. Da wir aber den Grad der in g enthaltenen Funktionen beliebig groß wählen dürfen, so sind die N Zahlen ε_i voneinander unabhängig. Denn man kann immer eine rationale Matrix von y bestimmen, bei der die Reihenentwicklungen an irgend N beliebigen endlichen Stellen b_i bis zu Gliedern beliebiger Ordnung vorgeschrieben sind. Das sehen wir folgendermaßen. Es sei g die gesuchte Matrix. Die vorgeschriebenen ersten Glieder der Reihenentwicklung von g nach Potenzen von $y - b_i$ seien mit r_i bezeichnet. Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Exponenten von $y - b_i$ in r_i sei $\lambda_i - 1$. Wir setzen

$$f(y) = (y - b_1)^{\lambda_1} (y - b_2)^{\lambda_2} \cdots (y - b_N)^{\lambda_N}, \quad f_i(y) = \frac{f(y)}{(y - b_i)^{\lambda_i}}$$

und es sei die ganze rationale Funktion f_i' so bestimmt, daß

$$f_i f_i' = 1 \quad \{\mathrm{mod}\ (y - b_i)^{\lambda_i}\}.$$

Man findet f_i' z. B. dadurch, daß man $1/f_i$ nach Potenzen von $y - b_i$ entwickelt. Es ist dann

$$g = \sum_{i=1}^{N} r_i f_i f_i'$$

eine Matrix mit den verlangten Eigenschaften.

Für die ϑ_i gilt dasselbe wie für die ε_i. An die Stelle der Matrix g tritt die Matrix t, die den Integranden tR bestimmt.

Dagegen ist es nicht so leicht einzusehen, daß die σ_i voneinander unabhängig sind. Wir wollen daher die Definition der σ_i in folgender Weise verstehen. Es soll σ_k die Zahl derjenigen im Zähler von $y - b_k$ enthaltenen Primteiler bedeuten, die unter die ϱ Kurven $\mathfrak{P}_i$ in IV, Nr. 3 aufgenommen werden müssen, wenn schon aus den Zählern von $y - b_1$, $y - b_2$, . . ., $y - b_{k-1}$ die notwendigen Primteiler zu den $\mathfrak{P}_i$ hinzugefügt sind.

4. *Ein Spezialfall.*

Wir wollen für einen nicht gar zu singulären Fall das zu einem Ausnahmewerte b_i gehörende δ_i berechnen. Ist b irgendeine Konstante, so ist der Zähler von $y - b$ das Produkt von n_2 Divisoren, die i. a. Primteiler und voneinander verschieden sind. Sie sind eineindeutig den Stellen des Körpers K_2 zugeordnet und bilden ein Büschel $\langle \mathfrak{A} \rangle$ des Geschlechtes p_2 von Kurven vom Geschlechte q'. Die Kurven $\mathfrak{A}$ haben noch die Besonderheit, daß sie sich gegenseitig nicht schneiden. (C, I, Nr. 8.)

Es sei im Körper K_2 der Zähler $\mathfrak{m}_i$ von $y - b_i$ von der Form (vgl. (28)),

$$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{a}_1^{\alpha_1} \mathfrak{a}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{a}_r^{\alpha_r}, \tag{39}$$

wo die $\mathfrak{a}_k$ voneinander verschiedene Primteiler sein sollen. Bezeichnen wir den Beitrag von b_i zur Verzweigungszahl w von K_2 in bezug auf y mit w_i, und bedenken wir, daß die Ordnung von $\mathfrak{m}_i$ gleich n_2 ist, so haben wir

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n_2, \qquad w_i = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i - 1) = n_2 - r. \tag{40}$$

Dem Primteiler $\mathfrak{a}_k$ entspreche die Kurve $\mathfrak{A}_k$ des Büschels $\langle \mathfrak{A} \rangle$, so daß der Zähler $\mathfrak{M}_i$ von

$y - b_i$ in K die Gestalt hat

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{A}_1^{\alpha_1}\mathfrak{A}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{A}_r^{\alpha_r}. \tag{41}$$

Die Kurven $\mathfrak{A}_k$ können zerfallen, aber sie sind teilerfremd. Hätten nämlich etwa $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ den Primteiler $\mathfrak{P}$ gemeinsam, so würde für $\mathfrak{P} = 0$ der Körper K_2 sowohl in $\mathfrak{a}_1$ wie in $\mathfrak{a}_2$ übergehen, was unmöglich ist. Hieraus ergibt sich: Verstehen wir allgemein unter $\mathfrak{Q}'$ den Divisor, der dieselben Primteiler enthält wie der ganze Divisor $\mathfrak{Q}$, aber jeden nur in der ersten Potenz, so ist

$$\mathfrak{M}_i' = \mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\cdots\mathfrak{A}_r'. \tag{42}$$

Wir machen jetzt folgende besondere Annahmen. Erstens sei die zu $y = b_i$ gehörende Zahl α (III, Nr. 2) gleich 1, so daß $\eta_i = \varepsilon_i = 0$ ist. Zweitens seien die $\mathfrak{A}_k$ Primteiler und es habe jedes $\mathfrak{A}_k$ höchstens einen mehrfachen Punkt. Keine der Kurven $\mathfrak{A}_k$ ist dann ein Punktprimteiler, weil sonst $(\mathfrak{L}, \mathfrak{A}_k) = 0$ wäre, während doch $(\mathfrak{L}, \mathfrak{A}_k) = n/n_2$ ist. Es ist daher $\sigma_i = 0$ und nach (37) haben wir

$$\delta_i = 2q - \vartheta_i, \tag{43}$$

wo ϑ_i die Zahl der Bedingungen dafür ist, daß das Residuum von $(tR\,dx)\,dy$ für $y = b_i$ das Differential einer algebraischen Funktion von x ist, und zwar einer Funktion des Körpers $\mathfrak{M}_i$. Dies Residuum sei $a\,dx$. Zunächst müssen die zyklischen Perioden von $\int a\,dx$ in $\mathfrak{A}_k$ verschwinden, was $2\pi(\mathfrak{A}_k)$ Bedingungen ergibt, wenn wir allgemein das Geschlecht eines Primteilers $\mathfrak{P}$ mit $\pi(\mathfrak{P})$ bezeichnen. Es habe ferner $\mathfrak{A}_k$ den mehrfachen Punkt S, durch den ν Zweige gehen mögen. Jedem dieser Zweige entspricht eine in S liegende Stelle von $\mathfrak{A}_k$, und an jeder dieser Stellen wird $a\,dx$ als Differential des Körpers $\mathfrak{A}_k$ unendlich, wie wir gleich zeigen werden, und hat dort i. a. ein Residuum. Diese ν Residuen müssen auch verschwinden, da ja $\int a\,dx$ auch keine logarithmischen Perioden haben darf. Das ergibt $\nu - 1$ Bedingungen, und zwar nur $\nu - 1$, weil die Summe dieser Residuen von selbst Null ist. Das letzte ist übrigens der Fall, ganz unabhängig davon, ob $\mathfrak{A}_k$ noch weitere mehrfache Punkte hat oder nicht, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

Wir haben daher: Bezeichnen wir allgemein für einen ganzen Divisor $\mathfrak{Q}$ ohne mehrfachen Primteiler mit $\mu(\mathfrak{Q})$ die Differenz der Zahl der durch die mehrfachen Punkte von $\mathfrak{Q}$ gehenden Zweige von $\mathfrak{Q}$ und der Zahl dieser Punkte, so ist

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{r}\{2\pi(\mathfrak{A}_k) + \mu(\mathfrak{A}_k)\}$$

und wegen (43)

$$\delta_i = 2q - \sum_{k=1}^{r}\{2\pi(\mathfrak{A}_k) + \mu(\mathfrak{A}_k)\}. \tag{44}$$

Es ist noch zu zeigen, daß $a\,dx$ als zum Körper $\mathfrak{A}_k$ gehöriges Differential an den mehrfachen Stellen von $\mathfrak{A}_k$ unendlich wird. Eine derartige Stelle sei S. Es bedeute $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_k(u, v)$ auch die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}_k$ für S. Da es auf Einheiten als Faktor nicht ankommt, so können wir annehmen, daß in der Umgebung von S

$$y - b_i = \mathfrak{A}_k^{\alpha_k}(u, v),\ \mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_k^{\alpha_k - 1}(u, v)\,\mathfrak{Z}_0\,, \tag{45}$$

wo $\mathfrak{Z}$ der Verzweigungsdivisor in bezug auf x, y sein soll.

Es habe tR die Form $T/(y - b_i)$, wo T nicht unendlich werden soll für $y = b_i$ also auch nicht für $\mathfrak{A}_k = 0$. Die Funktionen R_α der Matrix R haben wir so gewählt, daß sie im endlichen nur den Nenner $\mathfrak{Z}$ haben. Daher hat T die Form

$$T = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{A}_k^{\alpha_k - 1}}{\mathfrak{Z}},$$

wo $\mathfrak{T}$ in bezug auf x ganz ist und daher auch in der Umgebung von S. Wegen (45) ist in der Umgebung von S

$$T = \frac{\mathfrak{T}(u, v)}{\mathfrak{Z}_0}, \tag{46}$$

wo $\mathfrak{T}(u, v)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist, und zwar i. a. eine Einheit.

Da für $\mathfrak{A}_k = 0$ auch $y - b_i = 0$ und $dy = 0$ ist, so ist bei S

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right\} \frac{du}{\partial y / \partial v} = \frac{\mathfrak{Z} du}{\partial y / \partial v}$$

oder wegen (45)

$$dx = \frac{\mathfrak{Z}_0 \, du}{\alpha_k \partial \mathfrak{A}_k / \partial v}. \tag{47}$$

Es entsteht aber das Residuum $a\,dx$ aus $T\,dx$ für $\mathfrak{A}_k = 0$. Daher folgt aus (46) und (47)

$$a\,dx = \{T\,dx\}_{\mathfrak{A}_k = 0} = \frac{\mathfrak{T}\,du}{\alpha_k \, \partial \mathfrak{A} / \partial v},$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

Wir formen den für δ_i gefundenen Wert (44) noch um. Zunächst definieren wir für einen ganzen Divisor $\mathfrak{Q}$, der aus s voneinander verschiedenen Primteilern $\mathfrak{P}_k$ besteht, das algebraische Geschlecht $\pi(\mathfrak{Q})$ durch

$$\pi(\mathfrak{Q}) - 1 = \sum_{k=1}^{s} \{(\mathfrak{P}_k) - 1\}. \tag{48}$$

Dann ist

$$\pi(\mathfrak{M}_i') - 1 = \sum_{k=1}^{r} \{(\mathfrak{A}_k') - 1\}. \tag{49}$$

Es sei ferner b_0 ein regulärer Wert von y. Es zerfällt dann der Zähler $\mathfrak{M}_0$ von $y - b_0$ in n_2 Primteiler des Geschlechtes q'. Bedenken wir, daß q als Zahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung des Körpers $\mathfrak{M}_0$ gleich $n_2 q'$ ist, so folgt, wenn wir noch $\pi(\mathfrak{M}_0)$ mit π_a bezeichnen,

$$\pi_a - 1 = \pi(\mathfrak{M}_0) - 1 = n_2(q' - 1) = q - n_2. \tag{50}$$

Da die $\mathfrak{A}_k$ in (41) teilerfremd sind und einander nicht treffen, so gilt dasselbe von den $\mathfrak{A}_k'$ in (42). Daher können mehrfache Stellen des Divisiors $\mathfrak{M}_i'$ nur mehrfache Stellen der Faktoren $\mathfrak{A}_k'$ sein und nicht Punkte, in denen sich zwei der Faktoren $\mathfrak{A}_k'$ treffen, so daß

$$\mu(\mathfrak{M}_i') = \sum_{k=1}^{r} \mu(\mathfrak{A}_k'). \tag{51}$$

Beachten wir noch, daß in unserem besonderen Fall die $\mathfrak{A}_k$ Primteiler sind, so daß $\mathfrak{A}_k' = \mathfrak{A}_k$, so folgt aus (40), (44), (50), (51)

$$\delta_i = 2q - \sum_{k=1}^{r} \{2\pi(\mathfrak{A}_k') - 2\} - \sum_{k=1}^{r} \mu(\mathfrak{A}_k') - 2r = 2\pi_a - 2 - \{2\pi(\mathfrak{M}_i') - 2 + \mu(\mathfrak{M}_i')\} + 2w_i.$$

Wir setzen noch

$$\delta(\mathfrak{M}_i) = 2\pi_a - 2 - \{2\pi(\mathfrak{M}_i') - 2 + \mu(\mathfrak{M}_i')\} \tag{52}$$

und haben dann

$$\delta_i = \delta(\mathfrak{M}_i) + 2w_i. \tag{53}$$

Dieser Wert für δ_i erinnert an die Zeuthen-Segresche Invariante.

5. *Die Zeuthen-Segresche Invariante und die endgültige Formel für ϱ_0.*

Wir berechnen die Zeuthen-Segresche Invariante Z mit Hilfe des Kurvenbüschels $y =$ konst oder $\langle \mathfrak{M} \rangle$. Siehe etwa H. W. E. Jung, Algebraische Flächen, Hannover (1925), Kap. VI, besonders Formel (8) auf Seite 313. Da die Kurven der Schar $\langle \mathfrak{M} \rangle$ keine festen Schnittpunkte haben, so ist für irgendeine Kurve $\mathfrak{M}$ der Schar zu setzen

$$\delta(\mathfrak{M}) = 2\pi_a - 2 - \{2\pi(\mathfrak{M}') - 2 + \mu(\mathfrak{M}')\}, \tag{54}$$

wo π_a durch (50) gegeben ist. Verstehen wir dann unter δ_0 die über alle $\mathfrak{M}$ der Schar erstreckte Summe der $\delta(\mathfrak{M})$, so ist

$$Z = \delta_0 - 4\pi_a = \delta_0 - 4q + 4n_2 - 4. \tag{56}$$

Da nur die Zähler $\mathfrak{M}_i$ der N Differenzen $y - b_i$ einen Beitrag zu $\delta_0 = \Sigma\, \delta(\mathfrak{M})$ liefern, so folgt durch Vergleich von (53) mit (54)

$$\delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i = \delta_0 + 2w, \tag{57}$$

also nach (56)

$$Z = \delta - 4q - 4\left(\frac{w}{2} - n_2 + 1\right) = \delta - 4(q + p_2). \tag{58}$$

In Verbindung mit (38) ergibt sich so die endgültige Formel von Picard, PS, II, 408,

$$\varrho_0 = Z - \varrho + 4\pi + 2. \tag{59}$$

Diese Formel ist zunächst nur unter der Voraussetzung einfacher Verhältnisse bewiesen. Es sind aber ϱ_0 und π Invarianten des Körpers K. Ferner ist zwar weder Z noch ϱ invariant, wohl aber ihre Differenz. Gehen nämlich bei einer birationalen Transformation α Primteiler erster in solche zweiter Art über und umgekehrt β Primteiler zweiter in solche erster Art, so ändert sich seiner Bedeutung nach ϱ um $\beta - \alpha$ und um dieselbe Größe nimmt Z zu. Kann man also in K ein Kurvenbüschel $\langle \mathfrak{G} \rangle$ ohne feste Schnittpunkte finden, dessen einzelne Kurven keine anderen Singularitäten haben als wir sie bei den Kurven des Büschels $\langle \mathfrak{M} \rangle$ in Nr. 4 vorausgesetzt haben, so kann man als neue Veränderliche y den Quotienten zweier Kurven des Büschels $\langle \mathfrak{G} \rangle$ wählen. Und es gilt dann die Formel (59). Daß ein Kurvenbüschel der gewünschten Einfachheit immer zu finden ist, bleibt freilich zu beweisen. Darauf will ich hier nicht eingehen. Das Büschel braucht übrigens nicht die in Nr. 4 angenommene Einfachheit zu haben. Man kann auch noch beweisen, daß die Formel (59) besteht, wenn die den Körper K definierende Fläche isolierte singuläre Punkte ohne Besonderheiten hat.

Ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von K, so ist $Z + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 12 p_a + 8$, wo p_a das arithmetische Geschlecht von K ist. Daher hat man auch statt (59)

$$\varrho_0 = 12(p_a + 1) + 4(\pi - 1) - \{(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + \varrho\} + 2. \tag{60}$$

6. *Über die Zeuthen-Segresche Invariante.*

Es sei noch gezeigt, welche Gestalt die Definition der *Zeuthen-Segre*schen Invariante Z annimmt, wenn man nicht das Kurvenbüschel $\langle \mathfrak{M} \rangle$ benutzt, sondern das Büschel $\langle \mathfrak{A} \rangle$ der Kurven, in die die Kurven von $\langle \mathfrak{M} \rangle$ zerfallen.

Setzen wir analog zu (54)

$$\delta(\mathfrak{A}) = 2q' - 2 - \{2\pi(\mathfrak{A}') - 2 + \mu(\mathfrak{A}')\}, \tag{61}$$

so folgt aus (40) und (49) bis (52)

$$\delta(\mathfrak{M}_i) = \sum_{k=1}^{r} \delta(\mathfrak{A}_k) + 2w_i(q' - 1). \tag{62}$$

Wir bezeichnen die Summe aller $\delta(\mathfrak{A})$ mit δ^*. Von Null verschieden sind aber höchstens die $\delta(\mathfrak{A})$, wo $\mathfrak{A}$ in einer der N Kurven $\mathfrak{M}_i$ enthalten ist. Daher folgt aus (62) durch Summation

$$\delta_0 = \delta^* + 2w(q' - 1).$$

Wegen (56) und, da $q = n_2 q'$, folgt hieraus

$$(63) \quad Z = \delta^* + 4(q' - 1)\left(\frac{w}{2} - n_2\right) - 4 = \delta^* + 4(q' - 1)(p_2 - 1) - 4,$$

eine lange bekannte Formel, wenn sie auch noch nicht unter so allgemeinen Voraussetzungen wie hier bewiesen ist.

Halle, im Dezember 1931.

Eingegangen 16. Januar 1932

Ein Beweis der Transzendenz der *P*-adischen Exponentialfunktion.

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

In dieser Note wird gezeigt, daß die P-adische Exponentialfunktion

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

die bekanntlich für alle durch P bzw. für $P = 2$ durch P^2 teilbaren P-adischen Zahlen existiert, an jeder algebraischen P-adischen Stelle $z \neq 0$ im Existenzgebiet eine transzendente P-adische Zahl darstellt.

Das Beweisverfahren stützt sich auf einige Eigenschaften von e^z, die durch die Sonderheiten des P-adischen Zahlkörpers und seine nichtarchimedische Bewertung bedingt sind. Eine einfache formale Übertragung der klassischen Transzendenzbeweise für die gewöhnliche Exponentialfunktion ist anscheinend nicht möglich, da die P-adische Funktion nur noch eine beschränkt konvergente Reihe hat.

1. Sei ϱ eine feste, m eine über alle Grenzen wachsende natürliche Zahl. Setzt man

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\vartheta}\, d\vartheta}{\prod_{h=0}^{m} (\vartheta + k - h)^{\varrho}}, \quad R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{z\vartheta}\, d\vartheta}{\prod_{h=0}^{m} (\vartheta - h)^{\varrho}},$$

wobei C_0 einen sehr kleinen, C_∞ einen sehr großen Kreis um den Nullpunkt mit positivem Richtungssinn bedeutet, so besteht die Identität

$$\sum_{k=0}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz} = R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Die Ausdrücke $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ sind Polynome in z vom Grad $\varrho - 1$; man hat für sie die abbrechenden Potenzreihen

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \frac{z^l}{l!} A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

mit den Koeffizienten

$$A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\vartheta^{l-\varrho}\, d\vartheta}{\prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{m} (\vartheta + k - h)^{\varrho}}.$$

Der Charakter dieser Koeffizienten kann auf einfache Weise untersucht werden [1]); es zeigt sich, daß die Größen

$$\mathsf{A}_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^{\varrho} D_m^{\varrho} \frac{(\varrho - 1)!}{l!} A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

---

[1]) Siehe S. 138 meiner Arbeit „Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II", Journal f. d. r. u. ang. Mathematik **166** (1932).

ganz rational sind und daß gleichmäßig in den Indizes k, l, ϱ für großes m die Ungleichung

$$\left|\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (3e)^{m\varrho}$$

besteht. Dabei bedeutet

$$D_m = \{1, 2, \ldots, m\}$$

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, m$.

Wir führen noch die Abkürzungen

$$F\left(z, w \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\varrho-1} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} z^l w^k,$$

$$r\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^{\varrho} D_m^{\varrho} (\varrho - 1)!\, R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ein; alsdann besteht die Identität

$$F\left(z, e^z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = r\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

2. Von jetzt ab gehen wir zum Körper der P-adischen Zahlen K über, wobei P eine feste Primzahl bedeutet. Den P-adischen Wert einer Zahl α aus K bezeichnen wir mit $|\alpha|_P$ zum Unterschied vom gewöhnlichen Absolutbetrag. Eine P-adische Zahl α heiße wie üblich algebraisch, wenn es ein irreduzibles Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \not\equiv 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten und mindestens vom ersten Grad gibt, dessen Nullstelle α ist; gibt es kein solches Polynom, so heiße α transzendent.

Seien z und w zwei algebraische P-adische Zahlen. Dann gibt es einen kleinsten algebraischen Körper über dem Körper R der rationalen Zahlen, in dem gleichzeitig z und w liegen. Er heiße $R(s)$, sei vom Grad n über R und werde etwa durch die ganze algebraische P-adische Zahl s erzeugt. In s lassen sich z und w ausdrücken in der Gestalt

$$z = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1}}{a_n},$$

$$w = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{b_n},$$

wobei $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ und die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ ganz rational sind. Sei zur Abkürzung

$$a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|), \quad b = \max(|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_n|).$$

Offenbar läßt sich die ganze P-adische Zahl

$$G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = a_n^{\varrho-1} b_n^m F\left(z, w \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

als ein Polynom in s mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grad

$$(n-1)(m+\varrho-1)$$

darstellen. Wird bei festem ϱ der Index m genügend groß gewählt, so ist nach 1 aber

$$\left|\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (3e)^{m\varrho}$$

und $\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$ ganz rational. Offenbar erhält man die Majorante

$$G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \ll (3e)^{m\varrho} a^{\varrho-1} b^m \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\varrho-1} (1 + s + \cdots + s^{n-1})^{k+l}.$$

Jetzt ist

$$\sum_{k=0}^{m}(1+s+\cdots+s^{n-1})^k \ll (2+s+\cdots+s^{n-1})^m,$$

$$\sum_{l=0}^{\varrho-1}(1+s+\cdots+s^{n-1})^l \ll (2+s+\cdots+s^{n-1})^{\varrho-1},$$

also
$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\varrho-1}(1+s+\cdots+s^{n-1})^{k+l} \ll (2+s+\cdots+s^{n-1})^{m+\varrho-1}$$
$$\ll (n+1)^{m+\varrho-1}(1+s+s^2+\cdots+s^{(n-1)(m+\varrho-1)}),$$

und damit haben wir folgende Majorante erhalten:

$$G\left(s\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right) \ll (3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1} b^m (n+1)^{m+\varrho-1}(1+s+\cdots+s^{(n-1)(m+\varrho-1)}).$$

Genüge nun s der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$g(s) \equiv g_0 + g_1 s + \cdots + g_n s^n = 0.$$

Nach Annahme darf $g_n = 1$ vorausgesetzt werden; sei ferner

$$g = \max(|g_0|, |g_1|, \ldots, |g_n|).$$

Wird das Polynom $G\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right)$ durch $g(x)$ dividiert, so erhält man

$$G\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right) = H_0\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right) g(x) + H^*\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right),$$

wobei $H_0\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right)$ in x höchstens vom Grad $(n-1)(m+\varrho-1)-n$, $H^*\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right)$ hierin höchstens vom Grad $n-1$ ist und beide Polynome ganze rationale Koeffizienten haben. Sei insbesondere

$$H^*\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right) = H_0 + H_1 x + \cdots + H_{n-1}x^{n-1}, \quad H = \max(|H_0|, |H_1|, \ldots, |H_{n-1}|);$$

nach einem einfachen Hilfssatz ist [2])

$$H \leqq (3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1}\, b^m\, (n+1)^{m+\varrho-1}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-1)-n+1}.$$

Wegen $g(s) = 0$ besteht offenbar die Gleichung

$$G\left(s\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right) = H^*\left(s\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right).$$

Es ist also zulässig, statt $G\left(s\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right)$ weiter die Zahlen $H^*\left(s\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right)$ zu betrachten. Dabei wollen wir diejenigen hiervon unbeachtet lassen, die etwa verschwinden sollten.

Da die Zahl $H^*\left(s\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right)$ also ungleich Null ist, so können die Koeffizienten dieses Polynoms in s nicht alle verschwinden. Das Polynom $g(x)$ ist von höherem Grad in x als $H^*\left(x\,\middle|\,{m \atop \varrho}\right)$ und irreduzibel, daher hierzu teilerfremd. Die Resultante dieser beiden Polynome

$$D = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_n & & \\ & g_0 & g_1 & \cdots & g_n & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ H_0 & H_1 & \cdots & H_{n-1} & & \\ & H_0 & H_1 & \cdots & H_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \ddots \end{vmatrix}$$

[2]) Siehe Hilfssatz 1 meiner Arbeit „Zur Approximation algebraischer Zahlen, I", die demnächst in den Math. Annalen erscheint.

ist folglich eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl; man erhält für sie leicht die obere Schranke

$$|D| \leqq (2n-1)!\, g^{n-1} \left((3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1}\, b^{m}\, (n+1)^{m+\varrho-1}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)}\right)^{n}.$$

Jetzt gibt es aber nach bekannten Sätzen über Elimination zwei Polynome $\gamma(x)$ und $\mathsf{H}(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß identisch

$$\gamma(x)\, g(x) + \mathsf{H}(x)\, H^*\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = D$$

ist, folglich für $x = s$

$$H^*\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{D}{\mathsf{H}(s)}.$$

Auf der rechten Seite ist der Zähler eine nichtverschwindende ganze rationale Zahl, so daß

$$|D|_P \geqq |D|^{-1} \geqq \left((2n-1)!\, g^{n-1}\right)^{-1} \left((3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1}\, b^{m}\, (n+1)^{m+\varrho-1}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)}\right)^{-n}$$

ist. Im Nenner steht ein Polynom in der ganzen P-adischen Zahl s mit ganzen rationalen Koeffizienten; da der Nenner nicht Null sein kann, ist also

$$\left|\frac{1}{\mathsf{H}(s)}\right|_P \geqq 1.$$

Damit sind wir zu folgender Abschätzung gekommen:

$$\left|G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P = \left|H^*\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P$$
$$\geqq \left((2n-1)!\, g^{n-1}\right)^{-1} \left((3e)^{m\varrho}\, a^{\varrho-1}\, b^{m}\, (n+1)^{m+\varrho-1}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)}\right)^{-n}.$$

Die rechte Seite kann noch auf eine etwas bequemere Gestalt gebracht werden. Offenbar ist für jede genügend große feste natürliche Zahl ϱ und für über alle Grenzen wachsende natürliche Zahlen m

$$(2n-1)!\, g^{n-1}\, a^{(\varrho-1)n}\, b^{mn}\, (n+1)^{(m+\varrho-1)n}\, (2g)^{(n-1)(m+\varrho-2)n} \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{mn\varrho}.$$

Es folgt daraus

Hilfssatz 1: *Wird* $\varrho \geqq \varrho_0(z, w)$ *und* $m \geqq m_0(z, w, \varrho)$ *angenommen, so verschwindet entweder* $G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ *oder ist eine von Null verschiedene ganze P-adische Zahl mit*

$$\left|G\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P \geqq (4e)^{-mn\varrho}.$$

3. Von jetzt ab nehmen wir an, daß ϱ die Gestalt

$$\varrho = P^r + 1$$

hat, wobei r eine ganze rationale nichtnegative Zahl bedeutet. Ist dann

$$\varphi = \varphi(P^r + 1),$$

so besteht nach dem kleinen Fermatschen Satz die Kongruenz

$$P^{\varphi} \equiv 1 (\varrho).$$

Setzt man

$$m + 1 = \frac{P^{r+\mu\varphi} + 1}{P^r + 1},$$

wobei auch μ eine nichtnegative ganze rationale Zahl bedeutet, so ist offenbar die Zahl

$$(m+1)\varrho - 1 = P^{r+\mu\varphi}$$

eine reine Potenz von P.

Es soll eine obere Schranke für den P-adischen Wert der Zahl

$$\mathfrak{R}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = a_n^{\varrho-1}\, b_n^{m}\, r\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^{\varrho}\, D_m^{\varrho}\, (\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1}\, b_n^{m}\, R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

abgeleitet werden; dabei wollen wir aber annehmen, daß z nicht verschwindet und die Ungleichung

$$0 < |z|_P = P^{-t} \leqq P^{-3}$$

erfüllt.

Nach **1** ist

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod_{h=0}^{m} (\mathfrak{z} - h)^{\varrho}}.$$

Entwickelt man den Integranden in der Umgebung des unendlich fernen Punktes in eine Laurentreihe und wendet alsdann den Residuensatz an, indem man C_∞ auf den Punkt $\mathfrak{z} = \omega$ zusammenzieht, so erhält man die Potenzreihe

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{z^{(m+1)\varrho-1}}{((m+1)\varrho-1)!}\left(1 + \frac{c_1 z}{(m+1)\varrho} + \frac{c_2 z^2}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)} + \frac{c_3 z^3}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)\,((m+1)\varrho+2)} + \cdots\right),$$

wobei $c_1, c_2, c_3, \ldots$ gewisse ganze rationale Zahlen bedeuten. Hieraus folgt

$$\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = m!^{\varrho} D_m^{\varrho} (\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1} b_n^m \frac{z^{(m+1)\varrho-1}}{((m+1)\varrho-1)!}\, \mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

mit der Abkürzung

$$\mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = 1 + \frac{c_1 z}{(m+1)\varrho} + \frac{c_2 z^2}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)} + \cdots.$$

Nach bekannten Sätzen ist für jede nichtnegative ganze rationale Zahl h

$$|h!|_P = P^{-\left(\left[\frac{h}{P}\right] + \left[\frac{h}{P^2}\right] + \cdots\right)}.$$

Wegen

$$(m+1)\varrho - 1 = P^{\tau+\mu\varphi}$$

folgt hieraus erstens die Gleichung

$$|((m+1)\varrho-1)!|_P = P^{-(P^{\tau+\mu\varphi-1} + P^{\tau+\mu\varphi-2} + \cdots + 1)} = P^{-\frac{P^{\tau+\mu\varphi}-1}{P-1}} = P^{-\frac{(m+1)\varrho-2}{P-1}}.$$

Zweitens ist für jede nichtnegative ganze rationale Zahl h

$$|((m+1)\varrho+h-1)!|_P = P^{-\left(\left[\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P}\right] + \left[\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P^2}\right] + \cdots\right)}$$

$$\geqq P^{-\left(\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P} + \frac{(m+1)\varrho+h-1}{P^2} + \cdots\right)} = P^{-\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P-1}}$$

und daher für $h \geqq 1$ wegen $P \geqq 2$

$$\left|\frac{c_h z^h}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)\cdots((m+1)\varrho+h-1)}\right|_P$$

$$\leqq P^{\frac{(m+1)\varrho+h-1}{P-1} - \frac{(m+1)\varrho-2}{P-1} - hf} \leqq P^{h+1-3h} = P^{-2h+1} \leqq P^{-h} < 1.$$

In der Potenzreihe

$$\mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = 1 + \frac{c_1 z}{(m+1)\varrho} + \frac{c_2 z^2}{((m+1)\varrho)\,((m+1)\varrho+1)} + \cdots$$

streben also die Summanden gegen Null; alle von ihnen außer dem ersten haben einen P-adischen Wert kleiner als eins. Daraus folgt

$$\left|\mathfrak{r}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P = 1 \quad \text{und} \quad \left|\Re\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\right|_P = \left|m!^{\varrho} D_m^{\varrho} (\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1} b_n^m \frac{z^{(m+1)\varrho-1}}{((m+1)\varrho-1)!}\right|_P \neq 0,$$

wegen

$$0 < |D_m^{\varrho}(\varrho-1)!\, a_n^{\varrho-1}\, b_n^{\varrho}|_P \leqq 1,$$

also

$$0 < \left|\Re\left(z\left|\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right.\right)\right|_P \leqq \left|\frac{m!^{\varrho}}{((m+1)\varrho-1)!}\, z^{(m+1)\varrho-1}\right|_P.$$

Wendet man noch einmal die Formel für den P-adischen Wert der Fakultäten an, so erhält man

$$|m!|_P = P^{-\left(\left[\frac{m}{P}\right]+\left[\frac{m}{P^2}\right]+\cdots\right)} \leqq P^{-\left(\frac{m}{P-1}-\frac{\log m}{\log P}-1\right)},$$

also

$$\left|\frac{m!^{\varrho}}{((m+1)\varrho-1)!}\right|_P \leqq P^{\frac{(m+1)\varrho-2}{P-1}-\varrho\left(\frac{m}{P-1}-\frac{\log m}{\log P}-1\right)} = P^{\frac{\varrho-2}{P-1}+\varrho\frac{\log m}{\log P}+\varrho}$$

und damit schließlich die Abschätzung

$$0 < \left|\Re\left(z\left|\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right.\right)\right|_P \leqq P^{\frac{\varrho-2}{P-1}+\varrho\frac{\log m}{\log P}+\varrho}\, P^{-((m+1)\varrho-1)f}.$$

Ihr entnimmt man bei festem ϱ für genügend großes m den

Hilfssatz 2: *Sind die beiden natürlichen Zahlen ϱ und m von der speziellen Gestalt*

$$\varrho = P^r + 1, \quad m+1 = \frac{P^{r+\mu\varphi}+1}{P^r+1}$$

und ist $\varrho \geqq \varrho_1(z)$, $m \geqq m_1(z,\varrho)$, $|z|_P = P^{-f}$ mit $f \geqq 3$, so ist

$$0 < \left|\Re\left(z\left|\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right.\right)\right|_P \leqq P^{-\frac{m\varrho f}{2}} = |z|_P^{\frac{m\varrho}{2}}.$$

4. **Lehrsatz:** *Ist ζ eine P-adische Zahl mit*

$$0 < |\zeta|_P < \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad P = 2, \qquad 0 < |\zeta|_P < 1 \quad \text{für} \quad P \geqq 3,$$

so ist höchstens eine der beiden Zahlen ζ und e^{ζ} algebraisch.

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, daß für eine beliebige natürliche Zahl n die beiden Zahlen ζ und e^{ζ} nicht gleichzeitig in einem algebraischen Zahlkörper n-ten Grades liegen können.

Wir bestimmen eine natürliche Zahl λ, so daß

$$P^{-\lambda} < (4e)^{-2n}$$

ist, und setzen

$$z = P^{\lambda}\zeta.$$

Liegen dann ζ und e^{ζ} in einem algebraischen Zahlkörper n-ten Grades, so offenbar auch z und $e^z = w$. Jetzt besteht die Identität

$$G\left(s\left|\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right.\right) = \Re\left(z\left|\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right.\right),$$

wo s zu z und w nach 2 bestimmt ist. Auf der rechten Seite ist nach Hilfssatz 2 für unendlich viele Paare ϱ, m beliebig großer natürlicher Zahlen

$$0 < \left|\Re\left(z\left|\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right.\right)\right|_P \leqq |z|_P^{\frac{m\varrho}{2}} < P^{-\frac{m\varrho\lambda}{2}} < (4e)^{-mn\varrho}.$$

Die linke Seite kann für diese Paare also auch nicht verschwinden; nach Hilfssatz 1 ist daher

$$\left|G\left(s\left|\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right.\right)\right|_P \geqq (4e)^{-mn\varrho},$$

und damit sind wir zu dem gewünschten Widerspruch gelangt.

Göttingen, 1. 2. 1932.

Eingegangen 6. Februar 1932.